Untersuchungen zu den Kazhdan-Lusztig-Polynomen und zu dazupassenden Bimoduln

Diplomarbeit
an der Universität Freiburg
im Fach Mathematik

Immanuel Herrmann

$$
\begin{aligned}
\underline{H}_t &= v\mathbf{S}_t \\
\underline{H}_{st} &= v^2\mathbf{S}_{st} \\
\underline{H}_{rst} &= v^3\mathbf{S}_{rst} \\
\underline{H}_{trst} &= v^4\mathbf{S}_{trst} + v^2\mathbf{S}_t \\
\underline{H}_{strst} &= v^5\mathbf{S}_{strst} + 2v^3\mathbf{S}_{st} \\
\underline{H}_{rstrst} &= v^6\mathbf{S}_{rstrst} + 3v^4\mathbf{S}_{rst} \\
\underline{H}_{trstrst} &= v^7\mathbf{S}_{trstrst} + v^5(\mathbf{S}_{trst} + \mathbf{S}_{stst} - \mathbf{S}_{tst}) + 3v^5\mathbf{S}_{trst} + 3v^3\mathbf{S}_t
\end{aligned}
$$

Freiburg,
14. Juli 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung iii

Kapitel 1. Hecke-Algebren und was man dafür noch braucht 1

1. Coxeter-Gruppen und die Bruhat-Ordnung 1

1.1. Definition 1

1.2. Reduzierte Darstellungen und die Austausch-Bedingung 2

1.3. Obst-Ernte 6

1.4. Die Bruhat-Ordnung 7

1.5. Noch mehr Obst 9

1.6. Eindeutigkeitssätze 10

2. Hecke-Algebren und die Kazhdan-Lusztig-Polynome 13

2.1. Definition der Hecke-Algebra 13

2.2. Eine selbstduale Basis 14

2.3. Beispiel: Die $\underline{H}_x$ bei der Dieder-Gruppe 17

2.4. Wie geht's weiter? 19

Kapitel 2. Der Ring-Homomorphismus $\mathcal{E}$ und die $\mathbf{B}_x$ 21

1. Definition von $\mathcal{E}$ 21

1.1. Die graduierten $S \otimes S$-Moduln 21

1.2. Die Grothendieck-Gruppe 22

1.3. Existenz von $\mathcal{E}$ 22

2. Beweis von $S \otimes_{S^s} R(A) \cong R(A \cup sA) \oplus R(A \cap sA)(1)$ 26

2.1. Vorbereitungen 27

2.2. Fall $sx < x$ 28

2.3. Fall $x = e$ 28

2.4. Fall $sx > x, x \neq e$ 29

2.5. Konstruktion von M 29

2.6. $R(A)$ ist direkte Summe 30
2.7. Und jetzt noch $S \otimes_{S^s}$ drantensorieren 31
3. Eine Filtrierung von $\mathbf{B}_x$ 32
3.1. Die Kazhdan-Lusztig-Polynome bei den $\mathbf{B}_x$ 32
3.2. Der Dieder-Fall 33
3.3. Wenn die $\mathbf{B}_x$ echte Moduln sind 34

Kapitel 3. Kombinatorische Herangehensweise 37
1. Vorbereitungen 37
1.1. Eine neue Basis 37
1.2. Operation der $\underline{H}_x$ auf der neuen Basis 38
1.3. Allgemeingültige Eigenschaften 38
1.4. Eigenschaften bei Coxeter-Gruppen mit $stst$-Relationen 39
1.5. Die Unterräume $\mathcal{H}_s$ und $\mathcal{H}_s^\perp$ 41
2. Die Kazhdan-Lusztig-Polynome bei universellen Coxeter-Gruppen 44
3. Direkte Summen 46
4. Vermutungen bei anderen Coxeter-Gruppen 47
4.1. Ausblick 48

Notationen 49
Notationen

Literaturverzeichnis 51

Einleitung

Bei der Darstellungstheorie von Lie-Algebren interessiert man sich besonders für Moduln mit höchstem Gewicht, und unter diesen Moduln besonders für die sogenannten Verma-Moduln. Unter anderem ist man daran interessiert, wie oft welche einfache Moduln in Filtrierungen von solchen Verma-Moduln vorkommen können. Kazhdan und Lusztig haben eine Theorie entwickelt, die besagt, dass man diese Multiplizitäten in bestimmten Polynomen wiederfindet, nämlich in den Kazhdan-Lusztig-Polynomen ([**KL79**], [**BK81**]). Diese Polynome haben den Vorteil, dass man sie auf rein kombinatorische Art berechnen kann. Man erhält sie, indem man in einer bestimmten Algebra – der Hecke-Algebra – eine bestimmte Basis in einer bestimmten anderen ausdrückt. Trotzdem weiß man noch relativ wenig über sie, was unter anderem daran liegt, dass man sie rekursiv berechnen muss und deshalb nicht so leicht explizite Aussagen bekommt. Eine große unbewiesene Vermutung über die Kazhdan-Lusztig-Polynome ist, dass ihre Koeffizienten nie negativ sind ([**KL79**]).

Eine Herangehensweise an die Kazhdan-Lusztig-Polynome von Soergel [**Soe92**] besteht darin, gewisse Bimoduln zu konstruieren, die von den Verma-Moduln inspiriert sind. Dort kann man hoffen, die Kazhdan-Lusztig-Polynome wieder als Multiplizitäten in Filtrierungen zu haben, und zum Teil kann man es auch beweisen. Außerdem sollte es möglich sein, an den Bimoduln zu erkennen, ob die zugehörigen Kazhdan-Lusztig-Polynome negative Koeffizienten haben. Das erste Hauptresultat dieser Arbeit (in Kapitel 2) besteht darin, die Konstruktion dieser Moduln aus [**Soe92**] ausführlicher zu untersuchen und manche der Bimoduln explizit anzugeben.

Für einige Fälle ist schon bewiesen, dass die Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome nicht negativ sind. Ein zweites Resultat dieser Arbeit ist ein neuer Beweis für bestimmte Fälle. Ein Großteil des Beweises konnte dabei etwas allgemeiner gehalten werden, so dass die Chancen ganz gut stehen, dass sich der Beweis auf einige andere Fälle ausdehnen lässt, die bisher noch unbewiesen sind. Das wird in Kapitel 3 gemacht.

Die Hecke-Algebren und die Kazhdan-Lusztig-Polynome kann man relativ gut unabhängig vom Rest der Darstellungstheorie betrachten. Deshalb reichen zum Verständis dieser Arbeit normale Algebra-Grundkenntnisse aus. Alles, was man an tiefergehenden Kenntnissen benötigt, wird vorher (in Kapitel 1) eingeführt. Für das zweite Kapitel wäre allerdings etwas Erfahrung mit Tensor-Produkten ganz sinnvoll.

Und jetzt kommen noch die obligatorischen Danksagungen, die niemanden interessieren außer den Autor selbst und diejenigen, die hier erwähnt werden. Als erstes möchte ich Wolfgang Soergel danken für die gute Betreuung, dafür, dass er immer bereit war, Fragen zu beantworten und neue Fragen zu stellen, und dafür, dass er mir diese Diplomarbeit überhaupt erst ermöglicht hat. Dann möchte ich Karin[1], Berni[2] und Peter[3] danken für's Korrektur-Lesen und für LaTeX-Tips, und Karin auch noch einfach nur so für ihre Existenz. Und schließlich bedanke ich mich auch noch bei all meinen Mitbewohnern, Freunden, Verwandten, Bekannten, bei den Autoren von Büchern, die ich gelesen hab', bei sonstigen Leuten, denen ich irgendwie dankbar sein müsste, und – warum nicht gleich? – beim Rest der Welt.

Zum Titelbild: Ganz außen: Definition von $\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$ siehe Seite 44. Nicht ganz so außen: siehe Seite 48, Gleichung (3.7).

[1] Karin Halupczok (♡)
[2] Bernhard Seckinger
[3] Peter Fiebig

KAPITEL 1

Hecke-Algebren und was man dafür noch braucht

In diesem Kapitel werden alle Hilfsmittel eingeführt, die später benötigt werden. Das sind zunächst die Coxeter-Gruppen mit der Bruhat-Ordnung und einer ganzen Menge Sätze und Korollare dazu. Allerdings könnte man ganze Bücher darüber schreiben, deshalb kann hier nur das gemacht werden, was wirklich benötigt wird. Ausführlicher findet man es z. B. in [**Bou68**] und in [**Hum90**].

Im zweiten Abschnitt werden, darauf aufbauend, die Hecke-Algebren und die Kazhdan-Lusztig-Polynome definiert. (Auch das findet man ausführlicher in [**Hum90**].) Dabei bekommt man auch einen Algorithmus, um die Kazhdan-Lusztig-Polynome zu berechnen. Am Ende wird dieser Algorithmus auf die einfachsten Fälle angewendet, so dass man da schon sieht, dass die Koeffizienten nicht negativ sind.

1. Coxeter-Gruppen und die Bruhat-Ordnung

1.1. Definition.

Definition 1.1. *Ein Coxeter-System* $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ *ist eine Gruppe* $\mathcal{W}$ *mit einer endlichen Menge von Erzeugern* $\mathcal{S}$*, in der folgende Relationen erfüllt sind:*[1]

- $s^2 = e$ *für alle* $s \in \mathcal{S}$*,*
- *evtl. zusätzlich endlich viele Relationen der Form* $stst \cdots st = e$ *mit* $s, t \in \mathcal{S}$*.*

$\mathcal{W}$ *wird auch Coxeter-Gruppe genannt.*

Ein Coxeter-System ist also eine Coxeter-Gruppe mit einer ausgezeichneten Menge von Erzeugern. Wir werden während der gesamten Arbeit immer eine davon ausgehen, dass ein Coxeter-System $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ gegeben ist.

Jedes Element $x \in \mathcal{W}$ lässt sich als Produkt von Elementen aus $\mathcal{S}$ darstellen: $x = s_1 s_2 \cdots s_n$. (Man beachte, dass man keine Inversen von Erzeugern braucht, da $s = s^{-1}$ ist.) Wenn n minimal ist, wird die Darstellung *reduziert* genannt, und $l(x) := n$ ist die *Länge* von x.

[1] Nein, $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ steht *nicht* für Wolfgang Soergel.

Schauen wir uns diese Länge mal näher an: Wegen $x^{-1} = s_n^{-1} \cdots s_1^{-1} = s_n \cdots s_1$, ist $l(x^{-1}) = l(x)$. Für $x, y \in \mathcal{W}$ haben wir außerdem die Ungleichungen

$$|l(x) - l(y)| \leq l(xy) \leq l(x) + l(y): \tag{1.1}$$

Erst die rechte Ungleichung: Seien $x = s_1 \cdots s_n$ und $y = t_1 \cdots t_m$ reduzierte Darstellungen. Dann ist $xy = s_1 \cdots s_n t_1 \cdots t_m$, also kann $l(xy)$ nicht größer als $n + m$ sein. Die linke Ungleichung erhält man jetzt aus der rechten:

$$l(x) - l(y) = l((xy)y^{-1}) - l(y) \leq l(xy) + l(y^{-1}) - l(y) = l(xy).$$

Und dann macht man die gleiche Rechnung nochmal mit vertauschten x und y, um die Betragsstriche zu erhalten.

Noch etwas: $l(xy)$ ist genau dann gerade, wenn $l(x)+l(y)$ gerade ist. Das liegt daran, dass alle Relationen aus einer geraden Anzahl von Erzeugern bestehen. (Wer dieses Argument nicht mag, kann die Behauptung auch später aus Korollar 1.3 ableiten.) Daraus folgt insbesondere, dass $l(sx) \neq l(x)$ ist, und mit (1.1) dann $l(sx) = l(x) \pm 1$.

Die endlichen Coxeter-Gruppen gibt es auch in einer anschaulichen Version: Sie sind genau die endlichen Spiegelungsgruppen, d. h. die endlichen Gruppen von Automorphismen von Vektorräumen, die von Spiegelungen erzeugt werden. Hier zu erzählen, warum das so ist, würde viel zu weit gehen. Nur noch eine Bemerkung: Die Spiegelungen sind genau die Elemente, die man in der Form $xsx^{-1}, x \in \mathcal{W}, s \in \mathcal{S}$, schreiben kann. Auch bei abstrakten Coxeter-Gruppen werden wir Elemente dieser Form Spiegelungen nennen.

1.2. Reduzierte Darstellungen und die Austausch-Bedingung. Jetzt wollen wir uns die reduzierten Darstellungen mal näher anschauen. Dazu brauchen wir zuerst eine Notation: Sei

$$s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_n := s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_n,$$

also das Produkt der s_1 bis s_n, wobei s_i ausgelassen wurde.[2] Wir werden auch $s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_n$ schreiben, wenn s_i und s_j ausgelassen werden. Das soll *nicht* bedeuten, dass $i < j$ sein muss. (Allerdings werden wir diese Notation nur bei $i \neq j$ verwenden.)

Coxeter-Gruppen haben viele nette Eigenschaften, so dass man schön mit reduzierten Darstellungen rechnen kann. Man bekommt sie alle recht einfach, wenn man erst mal das folgende Lemma gezeigt hat. In der Literatur (z. B. in [**Bou68**], ch. IV, n° 1.5) findet man eine etwas anders aussehende, aber letztendlich äquivalente Aussage unter dem Namen „Austausch-Bedingung“.

[2]Die Schreibweise $s_1 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_n$, die man in manchen Büchern findet, finde ich nicht so intuitiv. (Und außerdem kommen manchmal auch Variablen mit Hut vor.)

LEMMA 1.2. *Sei $s_i \in \mathcal{S}, 1 \leq i \leq n$, mit $s_1 s_2 \cdots s_n = e$. Dann gibt es eine Zerlegung von $\{1, \ldots, n\}$ in Paar-Mengen, so dass für jedes Paar $\{i, j\}$ gilt: $s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_n = e$.*

Insbesondere folgt aus dem Lemma, dass n gerade ist. Man beachte übrigens, dass man nicht mehrere Paare *gleichzeitig* weglassen kann. Man kann zwar das Lemma wieder anwenden, wenn man ein Paar weggelassen hat, aber die neuen Paare sind evtl. andere.

Beweis: Irgendwie müssen wir in den Griff kriegen, wann ein Produkt von Erzeugern e ist. Dazu sei F die freie Gruppe über $\mathcal{S}$ und N der kleinste Normalteiler von F, der die Relationen von $\mathcal{W}$ enthält. Damit ist $\mathcal{W} = F/N$, und ein Produkt von Erzeugern ist in $\mathcal{W}$ genau dann e, wenn es, als Element von F aufgefasst, in N liegt.

Für den Beweis werden wir alles als Elemente von F auffassen; wenn wir trotzdem eine Gleichung in $\mathcal{W}$ schreiben wollen, notieren wir das mit $x \underset{\mathcal{W}}{=} y$. (Also: $x \underset{\mathcal{W}}{=} y :\Leftrightarrow xN = yN$.)

Da in F nicht $s = s^{-1}$ gilt, ist es nützlich, $\mathcal{S}$ zu erweitern: Sei $\hat{\mathcal{S}} := \mathcal{S} \cup \{s^{-1} \mid s \in \mathcal{S}\}$.

Das Lemma kann man nun auch so formulieren: Für jedes Tupel $T = (s_1, \ldots, s_n), s_i \in \hat{\mathcal{S}}$ mit $s_1 \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} e$ gilt das Folgende:

Eigenschaft $\mathcal{Z}(T)$: Es gibt eine Zerlegung Z_T von $\{1, \ldots, n\}$ in Paar-Mengen, so dass für jedes Paar $\{i, j\} \in Z_T$ gilt:

$$s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} e.$$

Es gibt noch einen kleinen Unterschied zum ursprünglichen Lemma: Die s_i können jetzt, anstatt aus $\mathcal{S}$ zu sein, auch die Form s^{-1} für $s \in \mathcal{S}$ haben; das werden wir im Beweis brauchen.

Um diese Version des Lemmas zu beweisen, betrachten wir die Menge $M \subset N$ der x, für die es ein $T = (s_1, \ldots, s_n)$ gibt mit $\mathcal{Z}(T)$ und $s_1 \cdots s_n = x$. Wir zeigen dann

$$M = N \tag{1.2}$$

und

$$\mathcal{Z}(s_1, \ldots, s_n) \Rightarrow \mathcal{Z}(t_1, \ldots, t_m) \text{ falls } s_1 \cdots s_n = t_1 \cdots t_m. \tag{1.3}$$

Dann gilt $\mathcal{Z}(T)$ für alle $T = (s_1, \ldots, s_n)$ mit $s_1 \cdots s_n \in N$; also sind wir damit fertig.

Für (1.2) reicht es zu zeigen, dass M die Erzeuger von N enthält (die Relationen von $\mathcal{W}$) und dass M ein Normalteiler ist.

M enthält die Erzeuger von N:

- s^2: Sei $T = (s, s)$. $Z_T = \{\{1, 2\}\}$ tut's, also gilt $\mathcal{Z}(T)$ und damit $s^2 \in M$.
- $stst\cdots st$: Sei $T = (s, t, s, t, \ldots, s, t) =: (s_1, \ldots, s_{2n})$. Behauptung:
$$Z_T = \{\{1, n+1\}, \{2, n+2\}, \ldots, \{n, 2n\}\}.$$
Betrachte $s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_{n+i}}} \cdots s_{2n}$. Aus der Voraussetzung folgt $s_{i-k} = s_{i+k}$, also
$$\begin{aligned} s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_{2i-1} &\underset{\mathcal{W}}{=} s_1 \cdots s_{i-2} s_{i+2} \cdots s_{2i-1} \\ &\underset{\mathcal{W}}{=} s_1 \cdots s_{i-3} s_{i+3} \cdots s_{2i-1} \\ &\underset{\mathcal{W}}{=} \ldots \underset{\mathcal{W}}{=} s_1 s_{2i-1} \underset{\mathcal{W}}{=} e. \end{aligned}$$
Analog erhält man $s_{2i} \cdots \boxed{\cancel{s_{n+i}}} \cdots s_{2n} \underset{\mathcal{W}}{=} e$, und beides zusammen ergibt $s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_{2n} \underset{\mathcal{W}}{=} e$.

M ist ein Normalteiler von F:

- $x, y \in M \Rightarrow xy^{-1} \in M$: Gelte $\mathcal{Z}(s_1, \ldots, s_n)$ und $\mathcal{Z}(t_1, \ldots, t_m)$ mit $x = s_1 \cdots s_n$ und $y = t_1 \cdots t_m$. Daraus bekommt man leicht eine Zerlegung für $T = (s_1, \ldots, s_n, t_m^{-1}, \ldots, t_1^{-1})$: Aus
$$s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} e$$
folgt
$$s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_n t_m^{-1} \cdots t_1^{-1} \underset{\mathcal{W}}{=} e,$$
und aus
$$t_1 \cdots \boxed{\cancel{t_i}} \cdots \boxed{\cancel{t_j}} \cdots t_m \underset{\mathcal{W}}{=} e$$
folgt
$$s_1 \cdots s_n t_m^{-1} \cdots \boxed{\cancel{t_i^{-1}}} \cdots \boxed{\cancel{t_j^{-1}}} \cdots t_1^{-1} \underset{\mathcal{W}}{=} e.$$
Somit gilt $\mathcal{Z}(T)$, und damit ist $xy^{-1} \in M$.
- $x \in M \Rightarrow yxy^{-1} \in M$: Œ $y \in \hat{\mathcal{S}}$. (Sonst Induktion über die Länge der Darstellung von y als Produkt von Elementen aus $\hat{\mathcal{S}}$.) Sei Z eine Zerlegung eines Tupels $(s_1, \ldots, s_n)$ zu x. Dann ist
$$\{\{i+1, j+1\} \mid \{i, j\} \in Z\} \cup \{\{1, n+2\}\}$$
eine Zerlegung des Tupels $(y, s_1, \ldots, s_n, y^{-1})$.

Jetzt zu (1.3): Da wir in einer freien Gruppe sind, reicht es, die folgende Äquivalenz zu zeigen:
$$\mathcal{Z}(s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+2}, \ldots, s_n) \Leftrightarrow \mathcal{Z}(s_1, \ldots, s_n) \text{ für } s_k = s_{k+1}^{-1}.$$
„$\Rightarrow$": Klar. (Man nehme das Paar $\{k, k+1\}$ und außerdem noch die passend verschobenen Paare von $Z_{(s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+2}, \ldots, s_n)}$; das ergibt eine Zerlegung von $(s_1, \ldots, s_n)$.)

„$\Leftarrow$“: Sei Z eine Zerlegung von $(s_1, \ldots, s_n)$; wir wollen eine Zerlegung von $(s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+2}, \ldots, s_n)$ konstruieren. Für $i, j \notin \{k, k+1\}$ gilt: Aus

$$s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} e$$

folgt

$$s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots \boxed{\cancel{s_k s_{k+1}}} \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} e.$$

Wenn in Z das Paar $\{k, k+1\}$ vorkommt, finden wir auf diese Art eine vollständige Zerlegung von $(s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+2}, \ldots, s_n)$ und sind fertig. Ansonsten gibt es i und j so, dass $\{i, k\}$ und $\{j, k+1\}$ in Z vorkommen. Dann kommen bei unserer neuen Zerlegung s_i und s_j in noch keinem Paar vor. Wir müssen also noch

$$s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots \boxed{\cancel{s_k s_{k+1}}} \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} e$$

zeigen, damit wir das Paar $\{i, j\}$ zur neuen Zerlegung dazunehmen können.

Sei $s := s_k$ (also $s^{-1} = s_{k+1}$). Es ist

$$s_1 \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_k}} \cdots s_n.$$

Falls $i < k$ ist, folgt daraus

$$s_1 \cdots s_{k-1} s \underset{\mathcal{W}}{=} s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_{k-1},$$

sonst folgt

$$s s_{k+2} \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} s s_k \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} s s_{k+1} \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} s_{k+2} \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_n.$$

Die gleichen Folgerungen bekommt man auch für j statt i.

Wenn $i < k < j$ ist, erhält man daraus

$$\begin{aligned} s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_{k-1} s_{k+2} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_n &\underset{\mathcal{W}}{=} s_1 \cdots s_{k-1} s s s_{k+2} \cdots s_n \\ &\underset{\mathcal{W}}{=} s_1 \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} e. \end{aligned}$$

Der Fall $j < k < i$ geht analog. Sei nun $i < j < k$. Dann ist

$$s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_{k-1} \underset{\mathcal{W}}{=} s_1 \cdots s_{k-1} s$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_{i+1} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_{k-1} &\underset{\mathcal{W}}{=} s_{i+1} \cdots s_{k-1} s \underset{\mathcal{W}}{=} s_i \cdots s_{k-1} s s \\ &\underset{\mathcal{W}}{=} s_i \cdots s_{k-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_{k-1} s_{k+2} \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} s_1 \cdots s_{k-1} s_{k+2} \cdots s_n \underset{\mathcal{W}}{=} e.$$

Analog für die Fälle $j < i < k, k < i < j$ und $k < j < i$. Also gilt $\mathcal{Z}(s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+2}, \ldots, s_n)$. $\square$

1.3. Obst-Ernte. Jetzt ernten wir die Früchte dieses Lemmas.[3]

KOROLLAR 1.3. *Sei* $x = s_1 \cdots s_n$ *mit* $s_i \in \mathcal{S}$. *Dann gibt es* $i_1, \ldots, i_k$ *so, dass* $x = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ *eine reduzierte Darstellung von* x *ist. Außerdem ist* $n - k$ *gerade.*

Beweis: Sei $k := l(x)$. Induktion über n (mit Induktionsanfang bei $n = k$). Für $n = k$ ist nichts zu zeigen. Sei also $n > k$. Sei $x = t_1 \cdots t_k$ irgendeine reduzierte Darstellung von x. Wir wenden Lemma 1.2 auf $xx^{-1} = s_1 \cdots s_n t_k \cdots t_1 = e$ an. Wegen $n > k$ gibt es mindestens ein Paar $\{i, j\}$ mit $i, j \leq n$. Damit haben wir

$$s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_n t_k \cdots t_1 = e$$
$$\Rightarrow s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots \boxed{\cancel{s_j}} \cdots s_n = t_1 \cdots t_k = x.$$

Anwenden der Induktionsvoraussetzung auf die linke Seite liefert $x = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ und $2|(n-2-k)$. Also auch $2|(n-k)$, und wir sind fertig. $\square$

Das folgende Korollar wird die *starke Austausch-Eigenschaft* genannt:

KOROLLAR 1.4. *Sei* $x = s_1 \cdots s_n$ *eine reduzierte Darstellung,* u *eine Spiegelung und* $y := ux$ *so, dass* $l(y) \leq l(x)$ *ist. Dann gibt es ein* $i \leq n$ *mit* $y = s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_n$.

Beweis: Sei $wtw^{-1} := u, w \in \mathcal{W}, t \in \mathcal{S}$. Wir machen Induktion über $l(w)$. Seien $w = t_1 \cdots t_k$ und $y = r_1 \cdots r_m$ reduzierte Darstellungen (von w bzw. y). Wir wenden Lemma 1.2 an auf

$$e = y^{-1}wtw^{-1}x = r_m \cdots r_1 t_1 \cdots t_k t t_k \cdots t_1 s_1 \cdots s_n.$$

Uns interessiert das Paar, das t enthält.

1. Fall:

$$r_m \cdots r_1 t_1 \cdots \boxed{\cancel{t_i}} \cdots t_k t_k \cdots t_1 s_1 \cdots s_n = e$$

oder

$$r_m \cdots r_1 t_1 \cdots t_k t_k \cdots \boxed{\cancel{t_i}} \cdots t_1 s_1 \cdots s_n = e.$$

Wegen $t_{i+1} \cdots t_k t_k \cdots t_{i+1} = e$ erhält man $y = t_1 \cdots t_{i-1} t_i t_{i-1} \cdots t_1 x$. Dann sind wir nach Induktionsvoraussetzung fertig. (Das neue w ist $t_1 \cdots t_{i-1}$, das neue t ist t_i.)

2. Fall:

$$r_m \cdots \boxed{\cancel{r_i}} \cdots r_1 t_1 \cdots t_k t_k \cdots t_1 s_1 \cdots s_n = e.$$

Wegen $t_1 \cdots t_k t_k \cdots t_1 = e$ erhält man $r_1 \cdots \boxed{\cancel{r_i}} \cdots r_m = x$. Daraus folgt $l(x) \leq m - 1 < l(y)$, also Widerspruch.

3. Fall:

$$r_m \cdots r_1 t_1 \cdots t_k t_k \cdots t_1 s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_n = e.$$

[3]Ein Lemma ist ein Baum, dessen Frucht „Korollar“ genannt wird.

Wegen $t_1 \cdots t_k t_k \cdots t_1 = e$ erhält man $y = s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_n$, was zu beweisen war. $\square$

1.4. Die Bruhat-Ordnung. Jetzt definieren wir eine partielle Ordung auf der Coxeter-Gruppe, die *Bruhat-Ordnung*[4]. Diese Ordnung hat einige schöne Eigenschaften, und wir werden sie später oft brauchen.

DEFINITION 1.5. *Für $x, y \in \mathcal{W}$ schreiben wir $y \to x$, wenn $l(y) < l(x)$ ist, und $x = uy$ für eine Spiegelung u. Die* Bruhat-Ordnung $\leqq$ *sei die transitive Hülle von $\to$, d. h. sei $y \leqq x$ genau dann, wenn es $z_1, \ldots, z_n$ gibt mit $y = z_1 \to \ldots \to z_n = x$. Für $y \leqq x \wedge y \neq x$ schreiben wir $y < x$.*

Dieser Definition sieht man ziemlich wenig an. Wir werden gleich noch andere Definitionen angeben, bei denen man mehr sieht. Dass wir als erstes diese hier angeben, liegt daran, dass man bei den anderen erst noch die Transitivität und die Wohldefiniertheit nachweisen muss. (Und dazu muss man doch wieder über diese Definition gehen.)

Was man immerhin schon dieser Definition ansieht, ist: Aus $y \leqq x$ folgt $l(y) \leq l(x)$, und aus $y < x$ folgt $l(y) < l(x)$. Die Bruhat-Ordnung verträgt sich also mit der Länge.

Bevor wir andere Definitionen angeben, beweisen wir ein kleines Lemma, das wir brauchen werden, um die Äquivalenz der Definitionen nachzuweisen:

LEMMA 1.6. *Seien $x, y \in \mathcal{W}$ mit $y \leqq x$, und sei $s \in \mathcal{S}$. Dann ist entweder $sy \leqq x$ oder $sy \leqq sx$.*

Beweis: Wie man sich leicht überlegt, reicht es, $sy \leqq x \vee sy \leqq sx$ für $y \to x$ zu zeigen. Sei also $x = uy$, u Spiegelung, und $l(x) > l(y)$. (Den allgemeinen Fall bekommt man durch Induktion über die Länge der $\to$-Kette.)

Wenn $l(sy) < l(y)$ ist, gilt $sy \to y \to x$, und wir sind fertig. Wenn $x = sy$ ist, sind wir auch schon fertig.

Sei jetzt also $l(sy) > l(y)$ und $x \neq sy$. Behauptung: Dann ist $sy \to sx$. Wegen $x = uy$ ist $sx = (sus)sy$, und sus ist wieder eine Spiegelung ($u = wtw^{-1} \Rightarrow sus = (sw)t(sw)^{-1}$); also bleibt nur noch zu zeigen, dass $l(sx) > l(sy)$ ist.

Annahme: $l(sx) \leq l(sy)$. Sei $s_1 \cdots s_n$ eine reduzierte Darstellung von y. Dann ist $ss_1 \cdots s_n$ eine reduzierte Darstellung von sy (wegen $l(sy) > l(y)$). Wir wenden die starke Austausch-Eigenschaft (Korollar 1.4) auf

[4]«Bruhat» wird französisch ausgesprochen.

$sx = (sus)sy$ an (das sx hier entspricht dem y aus dem Korollar und das sy dem x) und erhalten entweder $sx = s_1 \cdots s_n = y$ oder $sx = ss_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_n$. Aus dem ersten Fall folgt $x = sy$, aber das hatten wir schon abgehakt. Aus dem zweiten folgt $x = s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_n$, also insbesondere $l(x) < n = l(y)$. Widerspruch zu $y \to x$. $\square$

Jetzt zählen wir erstmal ein paar alternative Definitionen der Bruhat-Ordnung auf. Danach beweisen wir, dass alle Definitionen äquivalent sind.

Definition 1.7. *Seien $x, y \in \mathcal{W}$. Dann sei $y \leqq_{1.7} x$ genau dann, wenn es eine reduzierte Darstellung $x = s_1 \cdots s_n$ gibt und $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$ so, dass $s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ eine reduzierte Darstellung von y ist.*

Definition 1.8. *Seien $x, y \in \mathcal{W}$ und $x = s_1 \cdots s_n$ eine reduzierte Darstellung von x. Dann sei $y \leqq_{1.8} x$ genau dann, wenn es $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$ gibt so, dass $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$ eine reduzierte Darstellung von y ist.*

Definition 1.9. *Seien $x, y \in \mathcal{W}$ und $x = s_1 \cdots s_n$ eine reduzierte Darstellung von x. Dann sei $y \leqq_{1.9} x$ genau dann, wenn es $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$ gibt mit $y = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$.*

Bei all diesen Definitionen müssen wir noch die Transitivität nachweisen, und bei den Definitionen 1.8 und 1.9 muss man außerdem noch überprüfen, ob sie überhaupt unabhängig von der gewählten Darstellung von x sind. Das alles kriegen wir aber geschenkt, wenn wir zeigen, dass sie zu Definition 1.5 äquivalent sind.

Korollar 1.10. *Die Definitionen 1.5, 1.7, 1.8 und 1.9 sind äquivalent.*

Beweis: Wir zeigen $y \leqq_{1.9} x \Leftrightarrow y \leqq_{1.8} x \Rightarrow y \leqq_{1.7} x \Rightarrow y \leqq x \Rightarrow y \leqq_{1.8} x$.

Die Folgerungen $y \leqq_{1.9} x \Leftarrow y \leqq_{1.8} x$ und $y \leqq_{1.8} x \Rightarrow y \leqq_{1.7} x$ sind klar. $y \leqq_{1.9} x \Rightarrow y \leqq_{1.8} x$ erhält man auch sofort, indem man Korollar 1.3 auf das y aus Definition 1.9 anwendet.

$y \leqq x \Rightarrow y \leqq_{1.8} x$: Sei $x = s_1 \cdots s_n$ eine gegebene reduzierte Darstellung von x. Es reicht, den Fall $y \to x$ zu betrachten, also $l(y) < l(x)$ und $x = uy$. (Allgemeiner Fall per Induktion.) Aus $x = uy$ folgt $y = ux$ (Übung: Zeige $u^2 = e$); also können wir Korollar 1.4 anwenden und erhalten $y = s_1 \cdots \boxed{\cancel{s_i}} \cdots s_n$. Mit Korollar 1.3 können wir daraus eine reduzierte Darstellung von y machen und sind fertig.

$y \leqq_{1.7} x \Rightarrow y \leqq x$: Wir haben also nach Definition 1.7 reduzierte Darstellungen $x = s_1 \cdots s_n$ und $y = s_{i_1} \cdots s_{i_m}$. Induktion über n.

Sei $\tilde{x} := s_2 \cdots s_n$. Wegen $l(x) > l(\tilde{x})$ und $x = s\tilde{x}$ ist $\tilde{x} \leqq x$. Wenn $i_1 > 1$ ist, ist $y \leqq_{1.7} \tilde{x}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $y \leqq \tilde{x} \Rightarrow y \leqq x$. Wenn $i_1 = 1$ ist, benutzen wir die Induktionsvoraussetzung für $\tilde{y} := s_{i_2} \cdots s_{i_m} \leqq_{1.7} \tilde{x}$ und erhalten $\tilde{y} \leqq \tilde{x}$. Aus Lemma 1.6 erhalten wir $y = s\tilde{y} \leqq \tilde{x} \leqq x$ oder $y \leqq s\tilde{x} = x$. □

1.5. Noch mehr Obst. Es gibt noch ein paar leicht zu beweisende Aussagen, die wir später oft benutzen werden (z. T. ohne es explizit zu erwähnen).

KOROLLAR 1.11. *Für $x \in \mathcal{W}$ und $s \in \mathcal{S}$ sind x und sx bezüglich der Bruhat-Ordnung immer vergleichbar; es gilt also entweder $sx < x$ oder $sx > x$. Der erste Fall tritt genau dann ein, wenn es eine reduzierte Darstellung von x gibt, die mit s beginnt.*

Beweis: Sei $n := l(x)$ und $x = s_1 \cdots s_n$ eine reduzierte Darstellung von x. Wir unterscheiden die Fälle $l(sx) = n + 1$ und $l(sx) = n - 1$:

Wenn $l(sx) = n + 1$ ist, ist $ss_1 \cdots s_n$ eine reduzierte Darstellung von sx, also ist $x < sx$. In diesem Fall kann es keine reduzierte Darstellung von x geben, die mit s beginnt. Wäre nämlich $x = st_2 \cdots t_n$, dann wäre $sx = sst_2 \cdots t_n = t_2 \cdots t_n$, also $l(sx) = n - 1$.

Wenn $l(sx) = n - 1$ ist, betrachten wir eine reduzierte Darstellung von sx: $sx = r_1 \cdots r_{n-1}$. Dann ist $x = ssx = sr_1 \cdots r_{n-1}$ eine reduzierte Darstellung von x, die mit s anfängt und die uns außerdem $sx < x$ liefert. □

KOROLLAR 1.12. *Für $x, y \in \mathcal{W}$ und $s \in \mathcal{S}$ mit $sx > x$ und $sy > y$ sind $y < x$ und $sy < sx$ äquivalent.*

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $x = s_1 \cdots s_n$ eine reduzierte Darstellung von x. Dann folgt aus $y < x$, dass es eine reduzierte Darstellung $y = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ gibt (wie immer mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$). Daraus erhält man reduzierte Darstellungen $sx = ss_1 \cdots s_n$ und $sy = ss_{i_1} \cdots s_{i_k}$, die $sy < sx$ liefern.

„$\Leftarrow$“: Sei $sx = s_1 \cdots s_n$ eine reduzierte Darstellung mit $s_1 = s$. Aus $sy < sx$ folgt, dass es eine reduzierte Darstellung $sy = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ gibt. Wenn $i_1 > 1$ ist, ist schon $sy < x$, und wir sind fertig wegen $y < sy$. Sonst ist $s_{i_1} = s$, also $y = ss_{i_1} \cdots s_{i_k} = s_{i_2} \cdots s_{i_k}$. Dann ist auch $y < x$. □

KOROLLAR 1.13. *Für $x, y \in \mathcal{W}$ und $s \in \mathcal{S}$ mit $sx > x$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $y < sx$.
(ii) $sy < sx$.
(iii) $y < x \vee sy < x$.

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (iii): Sei $sx = s_1 \cdots s_n$ eine reduzierte Darstellung von sx mit $s_1 = s$. Wir machen eine Fallunterscheidung danach, ob $sy > y$ ist:

Fall $sy > y$: Dann ist $y < x \vee sy < x$ äquivalent zu $y < x$. Daraus folgt $y < sx$. Ist umgekehrt $y < sx$, dann gibt es eine reduzierte Darstellung $y = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$. Da $sy > y$ ist, ist $s_{i_1} \neq s$, also $i_1 > 1$. Also ist schon $y < x$.

Fall $sy < y$: Diesmal ist $y < x \vee sy < x$ äquivalent zu $sy < x$. Das ist nach Korollar 1.12 äquivalent zu $y < sx$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) geht analog zu (i) $\Leftrightarrow$ (iii). (Man vertausche jeweils y mit sy.) □

1.6. Eindeutigkeitssätze. Im Allgemeinen ist die reduzierte Darstellung nicht eindeutig. In manchen Fällen ist sie es doch, nämlich in *universellen* Coxeter-Gruppen. (Das sind Coxeter-Gruppen, in denen es nur die Relationen $s^2 = e$ gibt.) Das wurde vermutlich schon häufig bewiesen; wir werden allerdings einen noch etwas allgemeineren Satz brauchen:

SATZ 1.14. *Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein Coxeter-System, bei dem es nur Relationen der Form $stst = e$ gibt (und natürlich $s^2 = e$). Sei außerdem $\dot{<}$ eine Ordnung auf $\mathcal{S}$. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{W}$ genau eine reduzierte Darstellung $s_1 \cdots s_n$ mit*

$$s_i s_{i+1} s_i s_{i+1} = e \Rightarrow s_i \dot{<} s_{i+1} \quad \text{für } 1 \leq i < n. \tag{1.4}$$

Das bedeutet anschaulich: Die reduzierte Darstellung ist in diesen Coxeter-Gruppen eindeutig bis auf Vertauschen von Erzeugern, die kommutieren. (Wenn man eine reduzierte Darstellung hat, kann man nur durch Vertauschen von kommutierenden Erzeugern eine andere reduzierte Darstellung bekommen, die (1.4) erfüllt. Der Satz besagt: Wenn man das mit zwei verschiedenen Darstellungen macht, landet man bei der gleichen Darstellung.)

Aus dem Satz folgt natürlich auch sofort die Eindeutigkeit der reduzierten Darstellung bei universellen Coxeter-Gruppen.

Der Beweis ist ziemlich lang und ziemlich technisch, deshalb werden wir ihn nicht voll ausführen. Außerdem werden wir bei der Notation ein bisschen ungenau sein.

Beweisskizze: Sei $\mathcal{V}$ die Menge der Wörter über $\mathcal{S}$, die keine Pärchen enthalten (zweimal den gleichen Buchstaben direkt hintereinander) und die (1.4) erfüllen. Sei a die Abbildung von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{W}$, die alle Buchstaben miteinander multipliziert.

Der Beweis verläuft so: Zuerst macht man $\mathcal{V}$ zu einer Gruppe, indem man eine Multiplikation definiert und die Assoziativität überprüft. Dann rechnet man nach, dass a ein Gruppenisomorphismus ist. Damit gibt es zu jedem Element von $\mathcal{W}$ genau ein Element von $\mathcal{V}$, also genau eine Darstellung, die (1.4) erfüllt und keine zwei gleichen Erzeuger hintereinander enhält. Dann muss man nur noch zeigen, dass diese Darstellung auch reduziert ist. (Dass es nicht noch andere reduzierte Darstellungen gibt, die zwar (1.4) erfüllen aber irgendwo zwei gleiche Erzeuger hintereinander haben, ist klar.)

Die Multiplikation auf $\mathcal{V}$ wird folgendermaßen definiert: Man hänge die Wörter zusammen und *normalisiere* das Ergebnis.

„Normalisieren“ heißt: Führe solange eine der Operationen *sortieren* und *Pärchen streichen* aus, bis keine von beiden mehr ausführbar ist.

„Sortieren“ heißt: Suche eine Stelle im Wort, die (1.4) widerspricht, also benachbarte Buchstaben b_1 und b_2 mit $b_1b_2b_1b_2 = e$ (in $\mathcal{W}$) und $b_1 \dot{>} b_2$. Vertausche diese beiden Buchstaben.

„Pärchen streichen“ heißt: Suche eine Stelle im Wort, an der zweimal der gleiche Buchstabe hintereinander kommt. Entferne beide Buchstaben.

Damit diese Multiplikation überhaupt wohldefiniert ist, muss man zeigen, dass es nicht auf die Reihenfolge der Normalisierungs-Operationen ankommt (und dass das Ergebnis in $\mathcal{V}$ liegt, aber das ist klar). Dann bekommt man aber auch gleich die Assoziativität geschenkt: Wenn man erst die Wörter w_1 und w_2 zusammenhängt, das Ergebnis normalisiert, dann w_3 anhängt und dann wieder normalisiert (also $(w_1w_2)w_3$), kommt das gleiche raus, wie wenn man erst alle drei Wörter zusammenhängt und dann das Ganze normalisiert. Und das ist wiederum das Gleiche wie $w_1(w_2w_3)$.

Jetzt weiß man also, dass $\mathcal{V}$ eine Gruppe ist.

Zu zeigen, dass a ein Gruppenhomomorphismus ist, ist einfach: Das Zusammenhängen von Wörtern liefert das Produkt der Gruppenelemente, und die Normalisierungs-Oprerationen ändern ein Gruppen-Element von $\mathcal{W}$ nicht. (Wenn man's formal machen will, sollte man ein $\bar{a}$ definieren, das von beliebigen Wörtern nach $\mathcal{W}$ geht ...)

Für die Surjektivität muss man zu jedem Gruppenelement eine Darstellung finden, die in $\mathcal{V}$ liegt. Dazu nimmt man einfach irgend eine Darstellung und normalisiert sie.

Für die Injektivität muss man zeigen, dass alle Relationen, die in $\mathcal{W}$ gelten, auch in $\mathcal{V}$ gelten. (Insbesondere gilt dann $a(w_1) = a(w_2) \Rightarrow w_1 = w_2$.) Das ist einfach, da $\mathcal{W}$ sowieso über Erzeuger und Relationen gegeben ist. Zu prüfen ist also nur (in $\mathcal{V}$): $ss = \varepsilon$ für $s \in \mathcal{S}$ und $stst = \varepsilon$ für kommutierende $s, t \in \mathcal{S}$.[5] Beides folgt sofort aus den Normalisierungs-Operationen.

Bleibt zu zeigen, dass das Urbild eines $x \in \mathcal{W}$ eine *reduzierte* Darstellung von x liefert. Das ist auch einfach: Man nimmt irgend eine reduzierte Darstellung von x und normalisiert sie (wie beim Beweis der Surjektivität von a). Dabei wird die Darstellung nicht länger, also bleibt sie reduziert. So bekommt man ein Urbild von x, das eine reduzierte Darstellung liefert. □

Eigentlich brauchen wir Satz 1.14 fast gar nicht. Das einzige, was wir davon wirklich brauchen, ist folgendes Korollar:

KOROLLAR 1.15. *Sei $\mathcal{W}$ eine Coxeter-Gruppe, in der es nur Relationen der Form $t_1t_2t_1t_2 = e$ gibt. Seien $x \in \mathcal{W}$ und $s, t \in \mathcal{S}$ mit $x > sx$ und $x > tx$. Dann gilt $stst = e$, und es gibt eine reduzierte Darstellung von x, die mit st beginnt.*

Beweis: Wähle die Ordnung $\dot{<}$ auf $\mathcal{S}$ so, dass s das kleinste Element ist und t das zweitkleinste. Sei $s_1 \cdots s_n$ die reduzierte Darstellung von x, die (1.4) bezüglich dieser Ordnung erfüllt.

Behauptung 1: $s_1 = s$. Es gibt eine reduzierte Darstellung von x, die mit s beginnt, da $sx < x$ ist. Wenn man diese Darstellung sortiert (d. h. man vertauscht immer Paare, die (1.4) widersprechen), wird das s nie vom Anfang wegbewegt, da $s \dot{\leq} s_i$ für alle i. Wenn es keine Paare mehr gibt, die (1.4) widersprechen, ist man notwendigerweise bei der Darstellung $s_1 \cdots s_n$ angekommen. Also $s_1 = s$.

Behauptung 2: $s_2 = t$. Wegen $tx < x$ gibt eine reduzierte Darstellung von x, die mit t beginnt. Wenn man diese Darstellung sortiert, kann das t am Anfang höchstens mit s vertauscht werden. Es kann maximal einmal mit einem s vertauscht werden; sonst wären danach mehrere s nebeneinander, und die Darstellung wäre nicht mehr reduziert. Am Ende steht also t entweder an erster oder an zweiter Stelle. Wegen $s_1 = s$ ist nur $s_2 = t$ möglich.

Wir wissen jetzt, dass es eine reduzierte Darstellung von x gibt, die mit st beginnt. Da bei der Sortieraktion von Behauptung 2 irgendwann ein s vor das t geschoben wurde, muss $stst = e$ gelten. □

Und jetzt noch ein kleines Korollar aus dem Korollar (auch wieder für Gruppen, die nur $stst$-Relationen haben):

KOROLLAR 1.16. *Seien $s, t \in \mathcal{S}$ mit $stst = e$, und sei $x > sx$. Dann ist auch $tx > stx$.*

[5]Sei ε das leere Wort, also das neutrale Element von $\mathcal{V}$.

Beweis: Annahme: $tx < stx = tsx$. Da die Längen von x und von tx sich nur um eins unterscheiden, und die Längen von sx und von tsx auch, muss $l(x) = l(tx) + 1 = l(tsx) = l(sx) + 1$ sein, also insbesondere $x > tx$ und $tsx > sx$. Also gibt es eine reduzierte Darstellung $x = sts_1 \cdots s_n$. Dann ist aber $sx = ts_1 \cdots s_n > s_1 \cdots s_n = tsx$. Widerspruch. □

2. Hecke-Algebren und die Kazhdan-Lusztig-Polynome

Jetzt kommen wir langsam zum Hauptthema dieser Arbeit. Das, was in diesem Abschnitt gemacht wird, stammt im Wesentlichen aus [**Soe97**]. Insbesondere werden dort die Kazhdan-Lusztig-Polynome etwas anders definiert als z. B. in [**KL79**] und [**Hum90**], was das Ganze wesentlich einfacher und übersichtlicher macht. Daran werden wir uns hier auch halten. Was hier gegenüber [**Soe97**] neu ist, ist vor allem die ausführliche Behandlung vom Fall für Dieder-Gruppen.

2.1. Definition der Hecke-Algebra. Zu jedem Coxeter-System kann man eine Algebra definieren, die sogenannte *Hecke-Algebra*.

Definition 1.17. *Die* Hecke-Algebra $\mathcal{H}$ *zum Coxeter-System* $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ *ist eine Algebra über den Laurent-Polynomen* $\mathcal{L} := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ *mit der Basis* $(H_x)_{x \in \mathcal{W}}$*:*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{x \in \mathcal{W}} \mathcal{L} H_x \text{ (als } \mathcal{L}\text{-Modul).}$$

Die (assoziative) Multiplikation ist definiert durch: $H_x H_y = H_{xy}$ *falls* $l(x) + l(y) = l(x + y)$*, und* $H_s^2 = H_e + (v^{-1} - v) H_s$ *für* $s \in \mathcal{S}$*.*

Zur Notation: Wegen $l(x) + l(e) = l(xe)$ ist $H_x H_e = H_x$, und entsprechend $H_e H_x = H_e$; also ist H_e das neutrale Element. In Zukunft schreiben wir statt H_e nur noch 1.

Dass die Multiplikation durch die Definition eindeutig festgelegt wird, ist recht leicht zu sehen. Zu zeigen, dass es überhaupt eine assoziative Multiplikation gibt, die diese Bedingungen erfüllt, ist allerdings mit einigem Rechenaufwand verbunden (und es ist nicht besonders interessant); deshalb wird es hier nicht gemacht. (Wer Interesse hat, kann es in [**Hum90**], Chap. 7 nachlesen.)

Eindeutigkeit der Multiplikation: Seien x und y gegeben. Wir zeigen durch Induktion über $l(x)$, dass die Multiplikation $H_x H_y$ eindeutig definiert wurde: Der Fall $l(x) = 0$ ist einfach: Aus $l(x) = 0$ folgt $l(xy) = l(x) + l(y)$. Sei nun $l(x) > 0$. Entweder ist $l(x) + l(y) = l(xy)$; dann sind wir fertig. Sonst sei $s \in \mathcal{S}$ so, dass $\tilde{x} := xs < x$. Wenn

$l(sy) > l(y)$ ist, ist $H_x H_y = H_{\tilde{x}} H_s H_y = H_{\tilde{x}} H_{sy}$, und das kennen wir nach Induktionsvoraussetzung. Ansonsten ist $y > sy =: \tilde{y}$ und

$$\begin{aligned} H_x H_y &= H_{\tilde{x}} H_s H_s H_{\tilde{y}} = H_{\tilde{x}} \left(1 + (v^{-1} - v) H_s\right) H_{\tilde{y}} \\ &= H_{\tilde{x}} H_{\tilde{y}} + (v^{-1} - v) H_{\tilde{x}} H_y. \end{aligned}$$

Das kennen wir wieder nach Induktionsvoraussetzung.

Es gibt noch eine alternative Definition der Hecke-Algebra über Erzeuger und Relationen:

Definition 1.18. *Die* Hecke-Algebra *zu einem Coxeter-System* $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ *sei die assoziative* $\mathcal{L}$*-Algebra mit den Erzeugern* H_s*,* $s \in \mathcal{S}$*, und den Relationen*

$$H_s^2 = 1 + (v^{-1} - v) H_s \quad \textit{fürs} \in \mathcal{S}$$

und

$$\underbrace{H_s H_t H_s \cdots}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{H_t H_s H_t \cdots}_{n \text{ Faktoren}} \quad \textit{für } s, t \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N} \textit{ mit } (st)^n = e.$$

Diese Definition hat den Vorteil, dass sie mit Sicherheit funktioniert. Dafür wissen wir nicht, ob wir H_x eindeutig definieren können. (Wir wollen natürlich $H_x := H_{s_1} \cdots H_{s_n}$ für eine reduzierte Darstellung $x = s_1 \cdots s_n$, aber x kann ja mehrere verschiedene reduzierte Darstellungen haben.) Zu zeigen, dass beide Definitionen äquivalent sind, wäre auch viel Rechenaufwand, also glauben wir's einfach. (Man kann immerhin leicht nachrechnen, dass Definition 1.17 die Relationen aus Definition 1.18 erfüllt.)

2.2. Eine selbstduale Basis. In diesem Abschnitt werden wir eine neue Basis der Hecke-Algebra definieren, aus der sich dann die Kazhdan-Lusztig-Polynome ergeben werden. Die Basis soll selbstdual sein. Dazu müssen wir natürlich vorher die die Dualität definieren.

Als erstes brauchen wir die Invertierbarkeit der H_x: Aus $H_s^2 = 1 + (v^{-1} - v) H_s$ folgt $1 = (H_s + v - v^{-1}) H_s$ und daraus $H_s^{-1} = H_s + v - v^{-1}$, also sind die H_s Einheiten in $\mathcal{H}$. Da sich jedes $x \in \mathcal{W}$ als $s_1 \cdots s_n$ schreiben lässt, ist $H_x = H_{s_1} \cdots H_{s_n}$ auch eine Einheit.

Sei nun $d\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}, H \mapsto \overline{H}$ der Ringhomomorphismus von $\mathcal{H}$ mit $\overline{v} = v^{-1}$ und $\overline{H_x} = (H_{x^{-1}})^{-1}$. Behauptung: d ist eine Involution. Das müssen wir nur auf Ring-Erzeugern der Algebra nachrechnen: $d^2(v) = v$ ist klar, und

$$d^2(H_s) = d(H_s + v - v^{-1}) = H_s + v - v^{-1} + v^{-1} - v = H_s.$$

Nun heißt $H \in \mathcal{H}$ *selbstdual* genau dann, wenn $\overline{H} = H$. Beispiel:

$$\overline{H_s + v} = (H_{s^{-1}})^{-1} + v^{-1} = H_s + v - v^{-1} + v^{-1} = H_s + v.$$

Jetzt können wir die neue Basis definieren, oder genauer: deren Existenz in einem Theorem behaupten:

THEOREM 1.19. *Für alle $x \in \mathcal{W}$ gibt es genau ein selbstduales*

$$\underline{H}_x \in H_x + \sum_{y \in \mathcal{W}} v\mathbb{Z}[v] H_y.$$

(D. h. $\underline{H}_x$ hat außer H_x nur Summanden mit echt positiver v-Potenz.) $\underline{H}_x$ liegt sogar in $H_x + \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v] H_y$.

Bemerkung: Dass die $\underline{H}_x$ wirklich eine Basis von $\mathcal{H}$ bilden, folgt aus dem zweiten Teil des Theorems: Sei ein $H = \sum_y p_y H_y \in \mathcal{H}, p_y \in \mathcal{L}$ gegeben. Um das in der Basis $(\underline{H}_y)_y$ darzustellen, wähle ein maximales y mit $p_y \neq 0$ und benutze p_y als Koeffizient von $\underline{H}_y$. Dann hat $H - p_y \underline{H}_y$ keinen H_y-Anteil mehr und auch keinen H_z-Anteil für $z > y$. Also kann man jetzt rekursiv $H - p_y \underline{H}_y$ in der neuen Basis darstellen, bis man eine vollständige Darstellung von H hat.

Noch eine Bemerkung: Da sind sie nun, die Kazhdan-Lusztig-Polynome: Es sind die $h_{x,y} \in \mathbb{Z}[v]$, die man erhält, wenn man $\underline{H}_x$ in der Basis $(H_y)_y$ darstellt:

$$\underline{H}_x = \sum_{y \in \mathcal{W}} h_{x,y} H_y.$$

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gibt es eine große unbewiesene Vermutung:

VERMUTUNG 1.20 ([**KL79**]). *Die $h_{x,y}$ haben keine negativen Koeffizienten.*

Mehr dazu später; jetzt beweisen wir erst mal, dass die $\underline{H}_x$ überhaupt exisiteren.

Beweis von Theorem 1.19: Beim Beweis der Existenz lassen wir die Summe nur über $\{y \mid y < x\}$ laufen, beim Beweis der Eindeutigkeit über ganz $\mathcal{W}$. Dadurch bekommen wir beide Teile des Theorems.

Existenz: $\overline{H_e} = H_e$ und $\overline{H_s + v} = H_s + v$. Sei also $\underline{H}_e = H_e$ und $\underline{H}_s = H_s + v$ für $s \in \mathcal{S}$.

Jetzt berechnen wir erst mal $\underline{H}_s H_x$. Dazu machen wir eine Fallunterscheidung.

Fall $sx > x$:

$$\underline{H}_s H_x = (H_s + v) H_x = H_{sx} + v H_x.$$

Fall $sx < x$: Man beachte, dass in diesem Fall $l(x) = l(s) + l(sx)$ ist, also $H_x = H_s H_{sx}$.

$$\begin{aligned}\underline{H}_s H_x &= (H_s + v)\, H_x = H_s H_s H_{sx} + vH_x \\ &= \left(1 + (v^{-1} - v)H_s\right) H_{sx} + vH_x \\ &= H_{sx} + v^{-1}H_x - vH_x + vH_x \\ &= H_{sx} + v^{-1}H_x.\end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir also:

$$\underline{H}_s H_x = \begin{cases} H_{sx} + vH_x & \text{falls } sx > x, \\ H_{sx} + v^{-1}H_x & \text{falls } sx < x. \end{cases} \tag{1.5}$$

Damit kann man die Existenz der $\underline{H}_x$ per Induktion über $l(x)$ beweisen: Sei $l(x) > 1$ und seien die $\underline{H}_y$ für $y < x$ schon bekannt. Wir wählen ein $s \in \mathcal{S}$ mit $\tilde{x} := sx < x$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\underline{H}_{\tilde{x}} = H_{\tilde{x}} + \sum_{y<\tilde{x}} v\dot{h}_{x,y} H_y$ für geeignete $\dot{h}_{x,y} \in \mathbb{Z}[v]$. Durch Multiplikation mit $\underline{H}_s$ erhält man wieder etwas Selbstduales:

$$\begin{aligned}\underline{H}_s \underline{H}_{\tilde{x}} &= \underline{H}_s H_{\tilde{x}} + \sum_{y<\tilde{x}} v\dot{h}_{x,y} \underline{H}_s H_y \\ &= H_x + vH_{\tilde{x}} + \sum_{y<\tilde{x}} \dot{h}_{x,y} \left(vH_{sy} + v^{1\pm 1}H_y\right) \\ &= H_x + \sum_{y<x} h'_y H_y \quad \text{für geeignete } h' \in \mathbb{Z}[v].\end{aligned}$$

Wenn die h'_y alle keinen konstanten Term besitzen, sind wir fertig. (Dann ist $\underline{H}_x = \underline{H}_s \underline{H}_{\tilde{x}}$.) Ansonsten enthält $\underline{H}_s \underline{H}_{\tilde{x}}$ Summanden der Form $h'_y(0)H_y$. Diese kann man nicht einfach abziehen, sonst ist das Ergebnis nicht mehr sebstdual. Statt dessen ziehen wir $h'_y(0)\underline{H}_y$ ab. Nach Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass diese $\underline{H}_y$ existieren. Da H_y der einzige Term von $\underline{H}_y$ ohne v ist, heben sich die $h'_y(0)H_y$ weg, und es bleiben nur noch Terme mit v übrig. Also:

$$\underline{H}_x := \underline{H}_s \underline{H}_{\tilde{x}} - \sum_{y<x} h'_y(0)\underline{H}_y. \tag{1.6}$$

Eindeutigkeit:

Zunächst eine Behauptung: Für $z \in \mathcal{W}$ ist $\overline{H_z} \in H_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y$.

Für $z = e$ ist das klar. Wir haben schon die Existenz eines selbstdualen $\underline{H}_z \in H_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y$. Es gilt

$$\underline{H}_z = \overline{\underline{H}_z} \in \overline{H_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y} = \overline{H_z} + \sum_{y<z} \mathcal{L}\overline{H_y}. \tag{1.7}$$

Per Induktion ist $\overline{H_y} \in H_y + \sum_{w<y} \mathcal{L}H_w$; in (1.7) eingesetzt ergibt das $\underline{H}_z \in \overline{H_z} + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y$. Damit ist

$$\overline{H_z} \in \underline{H}_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y \subset \left(H_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y\right) + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y = H_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y.$$

Zurück zur Eindeutigkeit der $\underline{H}_x$: Seien $H_1, H_2 \in H_x + \sum_{y\in\mathcal{W}} v\mathbb{Z}[v]H_y$ selbstdual. Dann ist $H := H_1 - H_2$ auch selbstdual, und es gilt $H = \sum_{y\in\mathcal{W}} p_y H_y$ für geeignete $p_y \in v\mathbb{Z}[v]$. Wir nehmen nun an, dass $H \neq 0$ ist. Sei z maximal (bezüglich der Bruhat-Ordung) mit $p_z \neq 0$. Mit der Behauptung bekommen wir

$$\overline{H} \in \overline{p_z H_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y} = \overline{p_z H_z} + \sum_{y<z} \mathcal{L}\overline{H_y}$$

$$\subset \overline{p_z}\left(H_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y\right) + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y = \overline{p_z}H_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y.$$

Da H selbstdual ist, folgt daraus $p_z = \overline{p_z}$. Das ist aber ein Widerspruch zu $p_z \in v\mathbb{Z}[v]$. □

2.3. Beispiel: Die $\underline{H}_x$ bei der Dieder-Gruppe. Um uns an die $\underline{H}_x$ zu gewöhnen, rechnen wir sie für ein einfaches Beispiel aus: Sei die Coxeter-Gruppe eine Dieder-Gruppe, d. h. $\mathcal{S} = \{t_1, t_2\}$, und als Relationen haben wir, wenn überhaupt, nur eine der Form $t_1 t_2 t_1 t_2 \cdots t_1 t_2 = e$ (und natürlich $t_1^2 = t_2^2 = e$). Dieses Beispiel ist schön einfach (die Kazhdan-Lusztig-Polynome lassen sich leicht angeben), und außerdem können wir ein paar Ergebnisse daraus später nochmal gebrauchen.

Behauptung: In diesem Beispiel ist

$$\underline{H}_x = \sum_{y \leqq x} v^{l(x)-l(y)} H_y. \tag{1.8}$$

Um das zu beweisen, werden wir einfach die $\underline{H}_x$ wie beim Beweis ihrer Existenz mit (1.6) konstruieren. Dazu müssen wir insbesondere $\underline{H}_s \underline{H}_{\tilde{x}}$ für passende $\tilde{x}$ berechnen. Weil wir genau die gleiche Rechnung später nochmal brauchen, machen wir sie gleich so, dass sie in beliebigen Coxeter-Gruppen geht und formulieren sie als Lemma:

Lemma 1.21.

$$\underline{H}_s \sum_{y\leqq\tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)} H_y = \sum_{y\leqq\tilde{x}\vee sy\leqq\tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)+1} H_y + \sum_{y\leqq\tilde{x}\wedge sy\leqq\tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)-1} H_y.$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
&\underline{H}_s \sum_{y \leqq \tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)} H_y \\
=&\sum_{y \leqq \tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)} \underline{H}_s H_y \\
=&\sum_{y \leqq \tilde{x} \wedge y < sy} v^{l(\tilde{x})-l(y)} \underline{H}_s H_y + \sum_{y \leqq \tilde{x} \wedge sy < y} v^{l(\tilde{x})-l(y)} \underline{H}_s H_y \\
\overset{(1.5)}{=}&\sum_{y \leqq \tilde{x} \wedge y < sy} (\underbrace{v^{l(\tilde{x})-l(y)} H_{sy}}_{(\clubsuit)} + \underbrace{v^{l(\tilde{x})-l(y)+1} H_y}_{(\spadesuit)}) \\
&+ \sum_{y \leqq \tilde{x} \wedge sy < y} (\underbrace{v^{l(\tilde{x})-l(y)} H_{sy}}_{(\heartsuit)} + \underbrace{v^{l(\tilde{x})-l(y)-1} H_y}_{(\diamondsuit)})
\end{aligned}
$$

Bei ($\clubsuit$) und ($\heartsuit$) ändern wir den Laufindex der Summe zu $\hat{y} := sy$, damit wir danach die Summen ($\clubsuit$) und ($\spadesuit$) bzw. ($\heartsuit$) und ($\diamondsuit$) jeweils zusammenfassen können.

$$
\begin{aligned}
\cdots = &\underbrace{\sum_{s\hat{y} \leqq \tilde{x} \wedge s\hat{y} < \hat{y}} v^{l(\tilde{x})-l(\hat{y})+1} H_{\hat{y}}}_{(\clubsuit)} + \underbrace{\sum_{y \leqq \tilde{x} \wedge y < sy} v^{l(\tilde{x})-l(y)+1} H_y}_{(\spadesuit)} \\
&+ \underbrace{\sum_{s\hat{y} \leqq \tilde{x} \wedge \hat{y} < s\hat{y}} v^{l(\tilde{x})-l(\hat{y})-1} H_{\hat{y}}}_{(\heartsuit)} + \underbrace{\sum_{y \leqq \tilde{x} \wedge sy < y} v^{l(\tilde{x})-l(y)-1} H_y}_{(\diamondsuit)}.
\end{aligned}
$$

Um ($\clubsuit$) und ($\spadesuit$) bzw. ($\heartsuit$) und ($\diamondsuit$) zusammenfassen, schauen wir uns näher an, über welche y bzw. $\hat{y}$ die Summen laufen:

Aus $y \leqq \tilde{x} \wedge sy < y$ folgt $sy \leqq \tilde{x} \wedge sy < y$. Damit gilt

$$
\begin{aligned}
y \leqq \tilde{x} \wedge sy < y \quad &\Leftrightarrow \quad (y \leqq \tilde{x} \wedge sy \leqq \tilde{x}) \wedge sy < y \quad \text{und} \\
sy \leqq \tilde{x} \wedge sy < y \quad &\Leftrightarrow \quad (y \leqq \tilde{x} \vee sy \leqq \tilde{x}) \wedge sy < y.
\end{aligned}
$$

Bei ($\clubsuit$) wird also über die $\hat{y}$ mit $(\hat{y} \leqq \tilde{x} \vee s\hat{y} \leqq \tilde{x}) \wedge s\hat{y} < \hat{y}$ summiert und bei ($\diamondsuit$) über die y mit $(y \leqq \tilde{x} \wedge sy \leqq \tilde{x}) \wedge sy < y$.

Entsprechendes erhält man für ($\spadesuit$) und ($\heartsuit$), indem man y mit sy vertauscht. Jetzt kann man ($\clubsuit$) und ($\spadesuit$) zu

$$\sum_{y \leqq \tilde{x} \vee sy \leqq \tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)+1} H_y$$

und ($\heartsuit$) und ($\diamondsuit$) zu

$$\sum_{y \leqq \tilde{x} \wedge sy \leqq \tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)-1} H_y$$

zusammenfassen. □

Zurück zu unserem Beispiel. Um die $\underline{H}_x$ zu berechnen, machen wir Induktion über $l(x)$.

Für $l(x) = 0$ ist die Behauptung klar ($\underline{H}_e = 1 = H_e$), und für $l(x) = 1$, also $x = s \in \mathcal{S}$, haben wir schon ausgerechnet, dass $\underline{H}_s = H_s + v$ ist; da stimmt es also auch.

Den Fall $l(x) = 2$ müssen wir auch noch getrennt berechnen: Da hat x die Form $x = st$. Es gilt

$$\underline{H}_s\underline{H}_t = H_{st} + vH_t + vH_s + v^2 = \sum_{y \leqq st} v^{l(st)-l(y)} H_y,$$

also $\underline{H}_{st} = \underline{H}_s\underline{H}_t$, und die Behauptung gilt.

Sei nun $l(x) > 2$. Da die Coxeter-Gruppe nur zwei Erzeuger hat, hat x die Form $\underbrace{stst\cdots}_{n}$. Sei $\tilde{x} := sx = \underbrace{tst\cdots}_{n-1}$. Wir berechnen $\underline{H}_s\underline{H}_{\tilde{x}}$ unter Verwendung von Lemma 1.21:

$$\begin{aligned} \underline{H}_s\underline{H}_{\tilde{x}} &= \underline{H}_s \sum_{y \leqq \tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)} H_y \\ &= \sum_{y \leqq \tilde{x} \vee sy \leqq \tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)+1} H_y + \sum_{y \leqq \tilde{x} \wedge sy \leqq \tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)-1} H_y. \end{aligned} \tag{1.9}$$

In diesem speziellen Fall lässt sich das, worüber summiert wird, noch vereinfachen. Ein bisschen rumrechnen mit den reduzierten Darstellungen liefert

$$y \leqq \tilde{x} \vee sy \leqq \tilde{x} \Leftrightarrow y \leqq s\tilde{x} \quad \text{und} \quad y \leqq \tilde{x} \wedge sy \leqq \tilde{x} \Leftrightarrow y \leqq t\tilde{x}. \tag{1.10}$$

(An dieser Stelle wird benötigt, dass $l(x) > 2$ ist; für $l(x) = 2$ wäre $\tilde{x} = t$, und es gäbe gar kein y mit $y \leqq \tilde{x} \wedge sy \leqq \tilde{x}$.) Wir bekommen:

$$\underline{H}_s\underline{H}_{\tilde{x}} = \sum_{y \leqq x} v^{l(\tilde{x})-l(y)+1} H_y + \sum_{y \leqq t\tilde{x}} v^{l(\tilde{x})-l(y)-1} H_y = \sum_{y \leqq x} v^{l(x)-l(y)} H_y + \underline{H}_{t\tilde{x}}.$$

Wie man sieht, kommt hier außer H_x noch $H_{t\tilde{x}}$ als Summand ohne v-Potenz vor; wir müssen also nach (1.6) noch $\underline{H}_{t\tilde{x}}$ abziehen. Dann bekommen wir genau das, was wir behauptet haben. □

2.4. Wie geht's weiter? Wie schon erwähnt, ist es eine große offene Frage, ob die Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome nie negativ sind. Für den Fall der Dieder-Gruppen haben wir es eben bewiesen.

Es gibt eine ganze Menge weiterer Fälle, für die man es schon beweisen konnte. Das sind insbesondere die universellen Coxeter-Gruppen, die Weyl-Gruppen und eine ganze Menge endlicher Spezialfälle (siehe [**Hum90**], chap. 7.12).

Für universelle Coxeter-Gruppen werden wir in Kapitel 3 auch einen Beweis für die nicht-Negativität der Koeffizienten angeben. (Einen anderen Beweis dafür findet man z. B. in [**Dy88**].) Außerdem werden wir einen Ansatz zeigen, den Beweis auf Coxeter-Gruppen mit $stst$-Relationen zu übertragen. (Für diesen Fall wurde es bisher noch nirgends bewiesen.) Im nächsten Kapitel werden wir allerdings erst die Hecke-Algebren aus einer etwas darstellungstheoretischeren Sicht betrachten.

KAPITEL 2

Der Ring-Homomorphismus $\mathcal{E}$ und die $\mathbf{B}_x$

Eine Möglichkeit, Hecke-Algebren zu untersuchen, besteht darin, Bilder davon unter bestimmten Homomorphismen zu betrachten. In diesem Kapitel werden wir uns mit einem besonderen Homomorphismus $\mathcal{E}$ beschäftigen, der aus der Darstellungstheorie heraus motiviert ist. Die Idee zu diesem Homomorphismus stammt ursprünglich von Soergel und wird in [**Soe92**] behandelt. Auf diesem Paper beruht dieses Kapitel auch hauptsächlich.

Im ersten Abschnitt werden wir angeben, was $\mathcal{E}$ für Eigenschaften haben soll und die Existenz beweisen. Davor müssen wir allerdings noch ein paar andere Dinge definieren. Im zweiten Abschnitt werden wir den Beweis einer Proposition nachholen, die wir für die Existenz von $\mathcal{E}$ benötigen, und im letzten Abschnitt werden wir uns einige Zusammenhänge zwischen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ anschauen.

Im diesem Kapitel wird vorausgesetzt, dass der Leser mit Tensorprodukten einigermaßen vertraut ist.

1. Definition von $\mathcal{E}$

Bevor wir $\mathcal{E}$ angeben können, brauchen wir noch einige andere Definitionen. Damit man sich nicht so wundert, wozu wir sie brauchen, sei hier schon gesagt, dass der Homomorphismus in die Grothendieck-Gruppe der endlich erzeugten, graduierten $S \otimes S$-Moduln geht. (Und was das alles ist, werden wir jetzt definieren.)

1.1. Die graduierten $S \otimes S$-Moduln. Am Anfang des vorigen Kapitels hatten wir erwähnt, dass Coxeter-Gruppen auf Vektorräumen operieren können. (Die Elemente aus $\mathcal{S}$ operieren per Definition als Spiegelung, und wie die anderen operieren, ergibt sich dann.) Sei jetzt also V ein Vektorraum, auf dem $\mathcal{W}$ operiert.

Als nächstes definieren wir $S := R(V)$ als den Ring der regulären Funktionen auf V. Dann haben wir auch den Ring $S \otimes S = R(V \times V)$, und darüber wollen wir Moduln betrachten. Als Beispiele für $S \otimes S$-Moduln stelle man sich am besten die regulären Funktionen auf Teilmengen von $V \times V$ vor. (Mit solchen Moduln werden wir später auch rumrechnen.)

$S \otimes S$-Moduln könnte man auch S-Bimoduln nennen; beim Tensorieren werden wir sie auch als solche behandeln. Wenn wir allerdings ein Element f aus S von links bzw. von rechts an ein Modul-Element m dranmultiplizieren wollen, machen wir aus f ein Element aus $S \otimes S$ und multiplizieren das dann von links dran: $(f \otimes 1)m$ bzw. $(1 \otimes f)m$. Auf diese Art kommt man nicht so leicht mit den vielen verschiedenen Multiplikationen durcheinander.

Zur Graduierung: S ist graduiert (der Grad der Polynome); daraus ergibt sich eine Graduierung auf $S \otimes S$, und dazu passend kann man auch $S \otimes S$-Moduln graduieren. Das ist die Graduierung, die wir verwenden werden. Dadurch werden wir allerdings auch halbe Grade brauchen. (Man könnte sich die halben Grade ersparen, indem man statt der üblichen Graduierung von S die Graduierung benutzt, bei der alle Grade doppelt so groß sind. Wie man's lieber macht, ist Geschmacksache.)

1.2. Die Grothendieck-Gruppe. Die Grothendieck-Gruppe ist etwas ganz Allgemeines, das man für jede additive Kategorie definieren kann. Man nimmt die Objekte der Kategorie als Gruppen-Elemente (also in unserem Fall die $S \otimes S$-Moduln) und benutzt die direkte Summe als Addition. Damit die Gruppe auch unter Inversen-Bildung abgeschlossen ist, muss man zusätzlich noch ein paar *virtuelle* Objekte hinzunehmen, d. h. Gruppenelemente, zu denen es keine echten Objekte aus der Kategorie gibt. Hier eine allgemeine, formale Definition:

Definition 2.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Dann ist die* Grothendieck-Gruppe $\langle\mathcal{A}\rangle$ *die durch die folgenden Erzeuger und Relationen definierte abelsche Gruppe: Die Erzeuger sind die $\langle A\rangle$ für $A \in \mathcal{A}$, wobei $\langle A\rangle$ die Äquivalenzklasse aller zu A isomorphen Objekte von $\mathcal{A}$ ist. Die Relationen sind $\langle A\rangle + \langle B\rangle = \langle A \oplus B\rangle$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$.*

Wir interessieren uns für $\langle S \otimes S\rangle$. Das kann man sogar zu einem Ring machen, indem man die Multiplikation durch $\langle M\rangle \cdot \langle N\rangle := \langle M \otimes_S N\rangle$ definiert. (Das das wirklich ein Ring wird, folgt aus den ganzen netten Eigenschaften des Tensor-Produkts.) Wir werden übrigens später die spitzen Klammern nicht immer hinschreiben, da man sich eigentlich sowieso nur für Moduln bis auf Isomorphie interessiert.

1.3. Existenz von $\mathcal{E}$. Jetzt sind wir fast so weit, dass wir den Ring-Homomorphismus von der Hecke-Algebra in die Grothendieck-Gruppe angeben können. Davor nur noch zwei Notationen:

- Wenn wir einen Modul M um n in der Graduierung verschieben wollen, notieren wir das mit $M(n)$.
- Aus der Operation von $\mathcal{W}$ auf V bekommt man auch eine Operation von $\mathcal{W}$ auf S: $xf := f \circ x^{-1}$ für $x \in \mathcal{W}$ und $f \in S$. (Das hoch minus eins wird benötigt, weil es sonst eine Operation von rechts

wäre; soll es aber nicht.) Für $s \in \mathcal{S}$ sei $S^s := \{f \in S \mid sf = f\}$ die Menge der unter s invarianten Elemente von S. Dieses S^s ist ein Unterring von S.

THEOREM 2.2. *Es gibt einen Ring-Homomorphismus* $\mathcal{E}\colon \mathcal{H} \to \langle S \otimes S \rangle$ *von der Hecke-Algebra in die Grothendieck-Gruppe der graduierten* $S \otimes S$*-Moduln mit*

$$\mathcal{E}(v^n) = \left\langle S(-\tfrac{n}{2}) \right\rangle \text{ für } n \in \mathbb{Z} \text{ und} \tag{2.1}$$

$$\mathcal{E}(v^{-1}H_s + 1) = \langle S \otimes_{S^s} S \rangle \text{ für } s \in \mathcal{S}. \tag{2.2}$$

Bemerkung: Wegen $\mathcal{E}(H_s) = \mathcal{E}(v)\mathcal{E}(v^{-1}H_s + 1) - \mathcal{E}(v)$ legt das Theorem den Homomorphismus auf (Ring-)Erzeugern der Hecke-Algebra fest; damit ist er auf jeden Fall eindeutig.

Bevor wir das Theorem beweisen, noch eine Definition:

DEFINITION 2.3.

- *Für* $x \in \mathcal{W}$ *sei* $\Gamma_x = \{(xv, v) \mid v \in V\} \subset V \times V$. *(Das ist der Graph von* x *als Funktion von* V *nach* V*, allerdings mit vertauschten Koordinaten.)*
- *Für* $A \subset \mathcal{W}$ *sei* $\Gamma_A := \bigcup_{x \in A} \Gamma_x$.
- $R(A)$ *sei der Ring der regulären Funktionen auf* Γ_A.

Beweis von Theorem 2.2: Dass sich ein *Gruppen*homomorphismus finden lässt, der die Bedingungen (2.1) und (2.2) erfüllt, ist klar. Man muss also nur prüfen, ob sich ein $\mathcal{E}$ finden lässt, das sich mit der Multiplikation verträgt.

An der Definition der Hecke-Algebra über Erzeuger und Relationen (Definition 1.18) sieht man: Alle zu überprüfenden Relationen liegen schon in einer Unter-Hecke-Algebra, die zu einer Coxeter-Gruppe mit zwei Erzeugern gehört. (Anders ausgedrückt: in einer Unter-Hecke-Algebra, die von Elementen H_s und H_t, $s, t \in \mathcal{S}$, erzeugt wird.) Demnach reicht es, die Existenz von $\mathcal{E}$ bei solchen Hecke-Algebren nachzuweisen. Sei also für den Rest des Beweises $\mathcal{S} = \{s, t\}$.

Wenn man es genau nimmt, sollte man dabei folgendes beachten: Wir gehen von einer großen Coxeter-Gruppe aus und beschränken uns dann auf zwei Erzeuger. Dabei sollte man den Vektorraum, auf dem die Coxeter-Gruppe operiert, nicht verändern, da sich sonst auch S, $\langle S \otimes S \rangle$ und $\mathcal{E}$ ändert. Wir müssen also die Existenz von $\mathcal{E}$ für beliebige V, auf denen $\mathcal{W}$ operieren könnte, zeigen.

Um die Existenz von $\mathcal{E}$ zu beweisen, legen wir es auf einer $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{H}$ fest. Dadurch wird eindeutig ein Gruppenhomomorphismus $\mathcal{E}$ definiert. Danach müssen wir nur noch nachrechnen, dass (2.1) und

(2.2) erfüllt sind und dass $\mathcal{E}$ mit der Multiplikation kommutiert. Die $\mathbb{Z}$-Basis, für die wir $\mathcal{E}$ angeben wollen, ist $(v^n \underline{H}_x)_{n\in\mathbb{Z},x\in\mathcal{W}}$:

$$\mathcal{E}\left(v^n \underline{H}_x\right) := \left\langle R(\leqq x)(-\tfrac{n+l(x)}{2})\right\rangle \tag{2.3}$$

($R(\leqq x)$ ist eine Kurzschreibweise für $R(\{w \in \mathcal{W} \mid w \leqq x\})$.) Um zu beweisen, dass dadurch $\mathcal{E}$ zu einem Ringhomomorphismus wird, brauchen wir noch eine Proposition, deren Beweis auf später verschoben wird (Abschnitt 2):

Proposition 2.4. *Sei $\mathcal{W}$ die von den Spiegelungen s und t erzeugte Dieder-Gruppe. Sei $x \in \mathcal{W}$ beliebig, und sei $A := \{\leqq x\} \subset \mathcal{W}$. Dann gibt es einen $S \otimes S$-Isomorphismus*

$$S \otimes_{S^s} R(A) \cong R(A \cup sA) \oplus R(A \cap sA)(1).$$

Jetzt rechnen wir erst mal nach, dass das durch (2.3) definierte $\mathcal{E}$ die Gleichungen (2.1) und (2.2) erfüllt: Weil $\Gamma_e = \{(x,x) \mid x \in V\} \cong V$ genau diagonal in $V \times V$ liegt, ist $R(\Gamma_e) \cong S$, also

$$\mathcal{E}(v^n) = \left\langle R(e)(-\tfrac{n}{2})\right\rangle = \left\langle S(-\tfrac{n}{2})\right\rangle.$$

Wenn man Proposition 2.4 auf $A = \{e\}$ anwendet, erhält man $S \otimes_{S^s} S \cong R(\{e, s\})$, also:

$$\mathcal{E}(v^{-1}H_s + 1) = \mathcal{E}(v^{-1}\underline{H}_s) = \left\langle R(\{e,s\})(-\tfrac{1-1}{2})\right\rangle = \langle S \otimes_{S^s} S\rangle.$$

Bleibt zu zeigen, dass für $H, H' \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\mathcal{E}(HH') \cong \mathcal{E}(H) \otimes_S \mathcal{E}(H'). \tag{2.4}$$

Natürlich können wir uns darauf beschränken, das für eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{H}$ zu beweisen. Wir können uns aber noch weiter einschränken. Es reicht sogar, wenn wir für H nur Ring-Erzeuger von $\mathcal{H}$ einsetzen; wenn wir nämlich schon $\mathcal{E}(H_i H') \cong \mathcal{E}(H_i) \otimes_S \mathcal{E}(H')$ für $i = 1, 2$ und für beliebige $H' \in \mathcal{H}$ haben, dann folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H_1 H_2 H') &\cong \mathcal{E}(H_1) \otimes_S \mathcal{E}(H_2 H') \\ &\cong \mathcal{E}(H_1) \otimes_S \mathcal{E}(H_2) \otimes_S \mathcal{E}(H') \\ &\cong \mathcal{E}(H_1 H_2) \otimes_S \mathcal{E}(H'). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Zu zeigen ist jetzt also nur noch

$$\mathcal{E}(v^{\pm 1} v^n \underline{H}_x) \cong \mathcal{E}(v^{\pm 1}) \otimes_S \mathcal{E}(v^n \underline{H}_x) \tag{2.6}$$

und

$$\mathcal{E}(\underline{H}_s v^n \underline{H}_x) \cong \mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S \mathcal{E}(v^n \underline{H}_x) \tag{2.7}$$

für $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathcal{W}$ und $s \in \mathcal{S}$.

Bei (2.6) gibt es nicht viel zu zeigen:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(v^{n\pm 1}\underline{H}_x) &\cong R(\leqq x)(-\tfrac{n\pm 1+l(x)}{2}) \cong S(-\tfrac{\pm 1}{2}) \otimes_S R(\leqq x)(-\tfrac{n+l(x)}{2})\\ &\cong \mathcal{E}(v^{\pm 1}) \otimes_S \mathcal{E}(v^n\underline{H}_x).\end{aligned}$$

Bei (2.7) können wir Œ $n = 0$ annehmen, da sich der Rest darauf zurückführen lässt:

$$\mathcal{E}(\underline{H}_s v^n \underline{H}_x) \cong S(-\tfrac{n}{2}) \otimes_S \mathcal{E}(\underline{H}_s\underline{H}_x) \cong \mathcal{E}(\underline{H}_s\underline{H}_x)(-\tfrac{n}{2})$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S \mathcal{E}(v^n\underline{H}_x) &\cong \mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S S(-\tfrac{n}{2}) \otimes_S \mathcal{E}(\underline{H}_x)\\ &\cong \left(\mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S \mathcal{E}(\underline{H}_x)\right)(-\tfrac{n}{2}).\end{aligned}$$

Der einzige Fall, den man wirklich noch beweisen muss, ist also

$$\mathcal{E}(\underline{H}_s\underline{H}_x) \cong \mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S \mathcal{E}(\underline{H}_x) \text{für } x \in \mathcal{W} \text{ und } s \in \mathcal{S}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S \mathcal{E}(\underline{H}_x) &\cong (S \otimes_{S^s} S)(-\tfrac{1}{2}) \otimes_S R(\leqq x)(-\tfrac{l(x)}{2})\\ &\cong S \otimes_{S^s} R(\leqq x)(-\tfrac{l(x)+1}{2}).\end{aligned}$$

Durch Anwendung von Proposition 2.4 mit $A := \{\leqq x\}$ erhalten wir

$$\mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S \mathcal{E}(\underline{H}_x) \cong R(A \cup sA)(-\tfrac{l(x)+1}{2}) \oplus R(A \cap sA)(-\tfrac{l(x)+1}{2} + 1).$$

Jetzt müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

Fall $sx > x$: Dieser Fall verläuft ziemlich parallel zur Berechnung der $\underline{H}_x$ im Beispiel aus Abschnitt 2.3. Sei t der andere Erzeuger der Coxeter-Gruppe (also $\mathcal{S} = \{s, t\}$). Mit Gleichung (1.10) und der darauf folgenden Bemerkung bekommen wir

$$A \cup sA = \{y \mid y \leqq x \vee sy \leqq x\} = \{\leqq sx\}$$

und

$$A \cap sA = \{y \mid y \leqq x \wedge sy \leqq x\} = \begin{cases}\{\leqq tx\} & \text{falls } l(x) > 1,\\ \emptyset & \text{falls } l(x) = 1.\end{cases}$$

Weiter in der Rechnung: Falls $l(x) > 1$ ist, erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S \mathcal{E}(\underline{H}_x) &\cong R(\leqq sx)(-\tfrac{l(x)+1}{2}) \oplus R(\leqq tx)(-\tfrac{l(x)-1}{2})\\ &\cong R(\leqq sx)(-\tfrac{l(sx)}{2}) \oplus R(\leqq tx)(-\tfrac{l(tx)}{2})\\ &\cong \mathcal{E}(\underline{H}_{sx}) \oplus \mathcal{E}(\underline{H}_{tx})\\ &\cong \mathcal{E}(\underline{H}_{sx} + \underline{H}_{tx}).\end{aligned}$$

Falls $l(x) = 1$ ist, ist $R(A \cap sA) = R(\emptyset) = 0$; also fällt dann in der ganzen Rechnung der zweite Summand weg, und wir erhalten

$$\mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S \mathcal{E}(\underline{H}_x) \cong \mathcal{E}(\underline{H}_{sx}).$$

Jetzt erinnern wir uns noch einmal an das Beispiel aus 2.3. Dort hatten wir ausgerechnet, dass $\underline{H}_{st} = \underline{H}_s \underline{H}_t$ ist, und für $l(x) > 1$ hatten wir

$$\underline{H}_{sx} = \underline{H}_s \underline{H}_x - \underline{H}_{tx}$$
$$\Rightarrow \underline{H}_s \underline{H}_x = \underline{H}_{sx} + \underline{H}_{tx}.$$

Das passt genau zu den beiden Fällen, die wir jetzt haben. Wir bekommen

$$\mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S \mathcal{E}(\underline{H}_x) \cong \mathcal{E}(\underline{H}_s \underline{H}_x).$$

Fall $sx < x$: Korollar 1.13 besagt in diesem Fall $y \leqq x \Leftrightarrow sy \leqq x$. Also $A = sA$, und damit $A \cup sA = A \cap sA = A$. Damit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\underline{H}_s) \otimes_S \mathcal{E}(\underline{H}_x) &\cong R(\leqq x)(-\tfrac{l(x)+1}{2}) \oplus R(\leqq x)(-\tfrac{l(x)-1}{2}) \\ &\cong \mathcal{E}(v\underline{H}_x) \oplus \mathcal{E}(v^{-1}\underline{H}_x) \\ &\cong \mathcal{E}(v\underline{H}_x + v^{-1}\underline{H}_x). \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir nur noch $\underline{H}_s \underline{H}_x = v\underline{H}_x + v^{-1}\underline{H}_x$ für $sx < x$ zeigen. Dazu benutzen wir Lemma 1.21:

$$\underline{H}_s \underline{H}_x = \sum_{y \leqq x \vee sy \leqq x} v^{l(x)-l(y)+1} H_y + \sum_{y \leqq x \wedge sy \leqq x} v^{l(x)-l(y)-1} H_y.$$

Hier wenden wir nochmal Korollar 1.13 an (auf das, was unter den Summen steht) und erhalten

$$\underline{H}_s \underline{H}_x = \sum_{y \leqq x} v^{l(x)-l(y)+1} H_y + \sum_{y \leqq x} v^{l(x)-l(y)-1} H_y = v\underline{H}_x + v^{-1}\underline{H}_x.$$

$\square$

Jetzt wissen wir, dass es tatsächlich so einen Homomorphismus $\mathcal{E}$ gibt. Naja, fast: Eine Proposition haben wir noch nicht bewiesen ...

2. Beweis von $S \otimes_{S^s} R(A) \cong R(A \cup sA) \oplus R(A \cap sA)(1)$

In diesem Abschnitt holen wir den Beweis von Proposition 2.4 nach. Er stammt zum Großteil aus [**Soe92**]. Dort wurde die Aussage allerdings nur für endliche Dieder-Gruppen bewiesen. Zunächst nochmal die Aussage:

Sei $\mathcal{W}$ die von den Spiegelungen s und t erzeugte Dieder-Gruppe. Sei $x \in \mathcal{W}$ beliebig, und sei $A := \{\leqq x\} \subset \mathcal{W}$. Dann gibt es einen $S \otimes S$-Isomorphismus

$$S \otimes_{S^s} R(A) \cong R(A \cup sA) \oplus R(A \cap sA)(1).$$

Beweis: Wenn A unter der Links-Multiplikation mit s invariant ist, ist der Beweis recht einfach. Dies ist dann der Fall, wenn $sx < x$ ist. Diesen

Fall behandeln wir als erstes. Dann behandeln wir den Spezialfall $x = e$, und schließlich den Fall $sx > x, x \neq e$.

2.1. Vorbereitungen. Im Folgenden soll $\mathcal{W}$ auch auf $V \times V$ operieren können, und zwar indem es nur auf der ersten Komponente operiert. Sei also $x(u, v) = (xu, v)$ für $x \in \mathcal{W}$ und $u, v \in V$. Damit erhält man (für $x, y \in \mathcal{W}$)

$$x\Gamma_y = x\,\{(yv, v) \mid v \in V\} = \{(xyv, v) \mid v \in V\} = \Gamma_{xy}.$$

Insbesondere ist Γ_A s-invariant, falls A s-invariant ist (wieder unter Links-Multiplikation mit s).

Aus der Operation von $\mathcal{W}$ auf $V \times V$ können wir wieder eine Operation von $\mathcal{W}$ auf $S \otimes S$ bekommen:

$$x\colon S \otimes S \to S \otimes S, f \mapsto f \circ x^{-1} \text{ für } x \in \mathcal{W}.$$

Das interessiert uns vor allem für $x = s$. Ist A (und also auch Γ_A) s-invariant, so hat man auch eine Abbildung $s\colon R(A) \to R(A)$. Die beiden Eigenräume dieser Abbildung seien mit $R(A)^+$ und $R(A)^-$ bezeichnet (d. h. $R(A) = R(A)^+ \oplus R(A)^-$, und für $f \in R(A)^+$ bzw. $f \in R(A)^-$ ist $sf = f$ bzw. $sf = -f$).

Man beachte, dass $R(A)^+$ und $R(A)^-$ keine $S \otimes S$-Moduln sind. Aber immerhin sind sie noch $S^s \otimes S$-Moduln: Da $\mathcal{W}$ nur auf der ersten Komponente von $V \times V$ operiert, sind die Funktionen aus $S \otimes S$, die unter s invariant sind, gerade die, die in der ersten Komponente unter s invariant sind, also $S^s \otimes S$. Sei nun f aus $R(A)^+$ und g aus $S \otimes S$ mit $sg = g$. Dann ist $s(gf) = (sg)(sf) = gf$, also $gf \in R(A)^+$. Damit ist $R(A)^+$ ein $S^s \otimes S$-Modul. Für $R(A)^-$ geht's analog.

Sei $\alpha \in (V \times V)^* \subset S \otimes S$ eine Gleichung der Spiegelhyperebene von s als Spiegelung in $V \times V$. Oder, anders ausgedrückt: Sei $\alpha \in S \otimes S$ vom Grad 1 mit $s\alpha = -\alpha$. (Dieses α werden wir während des Beweises noch häufiger benutzen.) Dann liefert die Multiplikation mit α einen $S^s \otimes S$-Modul-Isomorphismus von $R(A)^+(1)$ nach $R(A)^-$:

Sei $f \in R(A)^+$, d. h. $f(sv) = f(v)$ für alle $v \in V \times V$. Dann ist $(\alpha f)(sv) = \alpha(sv)f(sv) = -\alpha(v)f(v)$, also $\alpha f \in R(A)^-$.

Injektivität: Sei $\alpha f = 0, f \in R(A)^+$. Betrachte αf auf einem $\Gamma_y, y \in A$. Die Nullstellenmenge von α ist dort $\{(yv, v) \mid yv = syv, v \in V\}$. Auf dem Komplement muss f null sein. Da das Komplement dicht und offen in Γ_y ist, ist f auf ganz Γ_y null. Da das für alle $y \in A$ gilt, ist $f = 0$.

Surjektivität: Zuerst ein kleines Diagramm zur Veranschaulichung der nachfolgenden Argumente:

$$\begin{array}{ccccc} S \otimes S & \cong & S^s \otimes S & \oplus & \alpha S^s \otimes S \\ \downarrow \pi & & \downarrow & & \downarrow \\ R(A) & \cong & R(A)^+ & \oplus & R(A)^- \end{array}$$

Sei $\pi\colon S\otimes S \twoheadrightarrow R(A)$ die Einschränkung auf Γ_A. Das Bild von $S^s\otimes S$ unter π liegt in $R(A)^+$, das Bild von $\alpha S^s\otimes S$ in $R(A)^-$. Da π eine Surjektion ist, ist insbesondere auch die Einschränkung von π auf $\alpha S^s\otimes S$ eine Surjektion nach $R(A)^-$. Also kann man jedes $f\in R(A)^-$ schreiben in der Form $f=(\alpha g)\restriction\Gamma_A$ mit $g\in S^s\otimes S$. Nun ist $g\restriction\Gamma_A\in R(A)^+$, also ist $g\restriction\Gamma_A$ ein Urbild von f unter der Multiplikation mit α.

2.2. Fall $sx<x$. Zurück zur Proposition: Wenn $sx<x$ ist, ist A unter s invariant, und die Proposition vereinfacht sich zu folgender Aussage:

Sei $A\subset\mathcal{W}$ s-stabil. Dann gibt es einen $S\otimes S$-Isomorphismus

$$S\otimes_{S^s}R(A)\cong R(A)\oplus R(A)(1).$$

Das können wir jetzt leicht zeigen: Wir beginnen mit einem $S\otimes S$-Homomorphismus

$$S\otimes_{S^s}R(A)^+\to R(A),f\otimes g\mapsto f\cdot g. \tag{2.8}$$

Das ist sogar ein Isomorphismus: Jedes Element $f\in S$ lässt sich schreiben in der Form $f=f_1+\alpha f_2$ mit $f_1,f_2\in S^s$. Damit lässt sich jedes Element aus $S\otimes_{S^s}R(A)^+$ als Summe von Elementen folgender Form schreiben:

$$(f_1+\alpha f_2)\otimes g=1\otimes(f_1g)+\alpha\otimes(f_2g).$$

Summen davon kann man aber auch selbst in der Form $1\otimes g_1+\alpha\otimes g_2$ schreiben mit $g_1,g_2\in R(A)^+$. Das Bild davon unter unserem Homomorphismus ist $g_1+\alpha g_2$. Wegen

$$R(A)\cong R(A)^+\oplus R(A)^-\cong R(A)^+\oplus\alpha R(A)^+$$

lässt sich jedes Element $h\in R(A)$ eindeutig in dieser Form (also $h=g_1+\alpha g_2$) schreiben. Daraus folgt sowohl die Injektivität als auch die Surjektivität von (2.8).

Über $S^s\otimes S$ ist $R(A)\cong R(A)^+\oplus R(A)^-\cong R(A)^+\oplus R(A)^+(1)$. Durch drantensorieren von $S\otimes_{S^s}$ erhalten wir $S\otimes S$-Isomorphismen:

$$S\otimes_{S^s}R(A)\cong S\otimes_{S^s}R(A)^+\oplus S\otimes_{S^s}R(A)^+(1)\overset{(2.8)}{\cong}R(A)\oplus R(A)(1).$$

2.3. Fall $x=e$. Für $x=e$ lautet die Behauptung $S\otimes_{S^s}S\cong R(\{e,s\})$. Zunächst hat man eine Surjektion $S\otimes S=R(V\times V)\twoheadrightarrow R(\{e,s\})$. Wir wollen daraus eine Surjektion $S\otimes_{S^s}S\twoheadrightarrow R(\{e,s\})$ machen. Dazu reicht es zu zeigen, dass der Kern der Abbildung $S\otimes S\twoheadrightarrow S\otimes_{S^s}S$ im Kern von $S\otimes S=R(V\times V)\twoheadrightarrow R(\{e,s\})$ liegt. Der Kern von $S\otimes S\twoheadrightarrow S\otimes_{S^s}S$ wird erzeugt von Elementen der Form $f\otimes 1-1\otimes f$ mit $f\in S^s$. Diese Elemente müssen wir auf $R(\{e,s\})$ runterprojizieren, in der Hoffnung, dass sie dadurch null werden: Sei $u\in\Gamma_{\{e,s\}}$:

1. Fall: $u=(v,v),v\in V$: $(f\otimes 1-1\otimes f)(v,v)=f(v)-f(v)=0$.

2. Fall: $u = (sv, v), v \in V$: $(f \otimes 1 - 1 \otimes f)(sv, v) = f(sv) - f(v) = 0$.

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass die Abbildung $S \otimes_{S^s} S \twoheadrightarrow R(\{e, s\})$ auch injektiv ist. Jedes Element von $S \otimes_{S^s} S$ lässt sich in der Form $1 \otimes f_1 + \alpha \otimes f_2$ schreiben. Sei also das Bild eines solchen Elements in $R(\{e, s\})$ gleich null: $f_1(v) + \alpha(u) \cdot f_2(v) = 0$ für $(u, v) \in \Gamma_{\{e,s\}}$, d. h. $u = v$ oder $u = sv$. Mit $\alpha(v) = -\alpha(sv)$ erhält man die Gleichungen $f_1(v) + \alpha(v) \cdot f_2(v) = 0$ und $f_1(v) - \alpha(v) \cdot f_2(v) = 0$. Daraus folgt $f_1(v) = f_2(v) = 0$ für alle v mit $\alpha(v) \neq 0$. Letzteres gilt auf einer offenen dichten Teilmenge von $V \times V$; damit sind f_1 und f_2 ganz null. Also ist die Abbildung auch injektiv und die Proposition gilt für $x = e$.

2.4. Fall $sx > x, x \neq e$. Bleibt der Fall $sx > x, x \neq e$. Wir interessieren uns für $D := A \setminus sA = \Big\{y \in \mathcal{W} \mid y \leqq x \wedge sy \nleqq x\Big\}$. Sei $x = tst \cdots \rlap{s}t, \rlap{s}t \in \{s, t\}$, eine reduzierte Darstellung von x. (Die beginnt wegen $sx > x$ mit t.) Jetzt sieht man: $D = \{x, x\rlap{s}t\}$. (Für diese beiden Elemente rechnet man's einfach nach, und für andere $y \leqq x$ sieht man leicht, dass dann auch $sy \leqq x$ ist.) Weil wir überall mit Operationen von links rechnen, schreiben wir $x\rlap{s}t$ noch um in rx für eine passende Spiegelung $r \in \mathcal{W}$. Also $D = \{x, rx\}$. Man beachte übrigens, dass $r \neq s$ ist; sonst wäre D s-invariant, aber $sD = sA \setminus A \neq A \setminus sA = D$.

Jetzt erst mal eine Übersicht über den Rest des Beweises: Zunächst arbeiten wir nur mit $S^s \otimes S$-Moduln und -Isomorphismen: Wir zeigen, dass $R(A) \cong R(A \cup sA)^+ \oplus M$ ist (wobei wir sinnvollerweise vorher noch M definieren). Danach tensorieren wir überall von links $S \otimes_{S^s}$ dran, und das wird dann unsere Proposition

$$S \otimes_{S^s} R(A) \cong R(A \cup sA) \oplus R(A \cap sA)(1)$$

ergeben.

2.5. Konstruktion von M. Zuerst widmen wir uns dem M. Dazu schauen wir uns erst mal die Γ_y näher an: Wann spannt $\Gamma_y \cup \Gamma_z$ schon ganz $V \times V$ auf?

$$\begin{aligned} \Gamma_y + \Gamma_z = V \times V &\Leftrightarrow \Gamma_y \cap \Gamma_z = \{(u, v) \mid u = xv = yv\} = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \Big\{v \in V \mid y^{-1}zv = v\Big\} = \{0\} \\ &\Leftrightarrow y^{-1}z \text{ ist weder Identität noch Spiegelung} \\ &\Leftrightarrow y \neq z \text{ und } \det y = \det z. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Jetzt wissen wir, dass Γ_D nicht ganz $V \times V$ aufspannt. Insbesondere gibt es eine Hyperebene $E \subset V \times V$, die Γ_D enthält. Wir hätten gerne noch eine Eigenschaft von E: Der Raum $\{w \in V \times V \mid w = -sw\} = \{(v, 0) \mid v = -sv\}$ soll *nicht* in E enhalten sein. Damit das möglich ist, müssen wir zeigen, dass dieser Raum nicht im Erzeugnis von Γ_D

enthalten ist. Dazu schneiden wir das Erzeugnis von Γ_D mit $V \times \{0\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\{(xu,u)+(rxv,v) \mid v+u=0, u,v \in V\} &= \{(xv-rxv,0) \mid v \in V\}\\ &= \{(v-rv,0) \mid v \in V\}\\ &= \{(u,0) \mid u=-ru\}\,.\end{aligned}$$

Wegen $r \neq s$ liegt $\{(v,0) \mid v=-sv\}$ also nicht im Erzeugnis von Γ_D, also können wir E wirklich so wählen, dass es Γ_D, aber nicht $\{(v,0) \mid v=-sv\}$ umfasst.

Zu diesem E nehmen wir uns jetzt eine Gleichung $\beta \in (V \times V)^*$ her. (Also $\beta(v)=0 \Leftrightarrow v \in E$.) β verschwindet auf Γ_x und auf Γ_{rx}. Tatsächlich verschwindet es sogar *nur* auf diesen Γ:

$$\beta \restriction \Gamma_y = 0 \Leftrightarrow y \in D. \tag{2.10}$$

Sei $y \notin D$. Entweder ist $\det y = \det x$ oder $\det y = \det rx$. Also auf jeden Fall $\Gamma_y + \Gamma_x + \Gamma_{rx} = V \times V$ (wegen (2.9)). Da aber β nicht überall null ist, kann es nicht auf ganz Γ_y null sein.

Jetzt können wir endlich M definieren: Sei M das $S^s \otimes S$-Erzeugnis von β in $R(A)$. M ist also die Menge der Funktionen, die man bekommt, wenn man eine Funktion aus $S^s \otimes S$ nimmt, mit β multipliziert und dann auf $R(A)$ einschränkt.

2.6. $R(A)$ **ist direkte Summe.** Wie schon erwähnt, wollen wir $R(A) \cong R(A \cup sA)^+ \oplus M$ zeigen. Offensichtlich haben wir schon eine Injektion $M \hookrightarrow R(A)$. Als nächstes brauchen wir eine Injektion $\varphi\colon R(A \cup sA)^+ \hookrightarrow R(A)$. Diese setzen wir zusammen aus $R(A \cup sA)^+ \hookrightarrow R(A \cup sA) \twoheadrightarrow R(A)$. Um die Injektivität von φ zu zeigen, sei $f \in R(A \cup sA)^+$ mit $\varphi(f)=0$, also mit $f \restriction \Gamma_A = 0$. f ist aus $R(A \cup sA)^+$, also unter s invariant. Damit ist auch $f \restriction \Gamma_{sA} = 0$, und somit $f=0$ auf ganz $\Gamma_{A \cup sA}$. Also ist φ injektiv.

Nun wollen wir $R(A) = \varphi(R(A \cup sA)^+) \oplus M$ zeigen. Zuerst $R(A) = \varphi(R(A \cup sA)^+) + M$: Wegen $1 \in \varphi(R(A \cup sA)^+)$ und $\beta \in M$ reicht es dafür zu zeigen, dass $R(A)$ als $S^s \otimes S$-Modul von 1 und β erzeugt wird. Wir zeigen im Folgenden sogar, dass $R(V \times V) = S \otimes S$ als $S^s \otimes S$-Modul von 1 und β erzeugt wird.

$S \otimes S$ wird als $S^s \otimes S$-Modul von 1 und α erzeugt. Wir müssen also zeigen, dass α im Erzeugnis von 1 und β liegt. Dazu schauen wir uns das Ganze im Grad 1 an, also in $(V \times V)^*$. Das Erzeugnis der 1 darin sind die unter s invarianten Linearformen

$$\begin{aligned}((V \times V)^*)^s &= (V^*)^s \oplus V^*\\ &= \{f \in v^* \mid f(v)=f(sv) \quad \forall v \in V\} \oplus V^*\\ &= \{f \in v^* \mid f(v-sv)=0 \quad \forall v \in V\} \oplus V^*.\end{aligned}$$

Das ist also ein Unterraum der Kodimension eins, dessen orthogonales Komplement $\{(v - sv, 0) \mid v \in V\} = \{(v, 0) \mid sv = -v\}$ ist. Die Nullstellenmenge von β ist E, und E haben wir so gewählt, dass es $\{(v, 0) \mid sv = -v\}$ *nicht* entält. Also liegt β nicht im Erzeugnis der 1; damit erzeugen 1 und β ganz $(V \times V)^*$ und insbesondere auch α.

Wir haben jetzt $R(A) = \varphi(R(A \cup sA)^+) + M$. Als nächstes zeigen wir $\varphi(R(A \cup sA)^+) \cap M = 0$.

Sei also $f \in \varphi(R(A \cup sA)^+) \cap M$. Wir wollen zeigen, dass $f = 0$ ist. Aus $f \in M$ folgt $f = \beta \cdot g$ für ein g aus $S^s \otimes S$. Da $\beta \restriction \Gamma_D = 0$, ist auch $f \restriction \Gamma_D = 0$.

Für $v \in \Gamma_{A \cap sA}$ gilt:

$$\begin{aligned} \beta(v) \cdot g(v) = f(v) &\overset{f \in \varphi(R(A \cup sA)^+)}{=} f(sv) \\ &= \beta(sv) \cdot g(sv) \overset{g \in S^s \otimes S}{=} \beta(sv) \cdot g(v). \end{aligned}$$

Also ist für jedes v entweder $g(v) = 0$ (und damit auch $f(v) = 0$) oder $\beta(v) = \beta(sv)$. Sei $N \subset V \times V$ die Nullstellenmenge von $\beta - s\beta$. Aus (2.10) folgt $\beta \restriction \Gamma_x = 0$ und $\beta \restriction \Gamma_{sx} \neq 0$; deshalb kann β nicht s-invariant sein, also $N \neq V \times V$. Andererseits ist die Spiegelhyperebene von s Teilmenge von N. Daher ist N selbst genau diese Spiegelhyperebene.

Für jedes $y \in A \cap sA$ ist $N \cap \Gamma_y = \{(yv, v) \mid yv = syv\}$ eine Hyperebene in Γ_y. Auf $\Gamma_y \setminus E$ ist g überall null, also auch auf ganz Γ_y. Damit haben wir überall $g = 0$, dann $f = 0$ und damit $R(A) \cong R(A \cup sA)^+ \oplus M$ über $S^s \otimes S$.

2.7. Und jetzt noch $S \otimes_{S^s}$ drantensorieren. Insbesondere haben wir jetzt auch schon

$$S \otimes_{S^s} R(A) \cong S \otimes_{S^s} R(A \cup sA)^+ \oplus S \otimes_{S^s} M$$

über $S \otimes S$. Dass $R(A \cup sA) \cong S \otimes_{S^s} R(A \cup sA)^+$ ist, ist klar. Wir brauchen jetzt also nur noch $S \otimes_{S^s} M \cong R(A \cap sA)(1)$.

M ist das $S^s \otimes S$-Erzeugnis von β in $R(A)$. Dann ist $S \otimes_{S^s} M$ isomorph zum $S \otimes S$-Erzeugnis von β. Sei $\tilde{M}$ dieses Erzeugnis. Wir suchen jetzt einen Isomorphismus $\psi : R(A \cap sA)(1) \to \tilde{M}$. Für $f \in R(A \cap sA)(1)$ sei $\psi(f)$ definiert durch: $\psi(f)(v) = \beta(v) f(v)$ für $v \in \Gamma_{A \cap sA}$ und $\psi(f)(\Gamma_D) = 0$. Das funktioniert, da β sowieso auf Γ_D null ist, also auch $\psi(f)$ nach der ersten Hälfte der Definition. Dass das Bild von ψ auch wirklich in $\tilde{M}$ (und nicht nur in $R(A)$) liegt, ist auch klar. Jetzt hoffen wir, dass ψ ein Isomorphismus ist.

Injektivität: Sei $\psi(f) = 0$. Dann ist für alle $v \in R(A \cap sA)$ entweder $\beta = 0$ oder $f = 0$. Jetzt betrachten wir einfach Γ_y für jedes $y \in A \cap sA$ einzeln. Wegen (2.10) ist dort β nicht überall 0, also fast nirgends, also nirgends. Damit ist $f \restriction \Gamma_y = 0$, und weil wir das für jedes y machen, ist $f = 0$.

Surjektivität: Wenn g in $\tilde{M}$ liegt, lässt es sich in der Form $g = \beta f, f \in R(A)$ schreiben, und insbesondere ist $g \restriction \Gamma_D = 0$. Also ist $g = \psi(f \restriction R(A \cap sA))$.

Wir haben also (oh wie schön):

$$\begin{aligned} S \otimes_{S^s} R(A) &\cong S \otimes_{S^s} R(A \cup sA)^+ \oplus S \otimes_{S^s} M \\ &\cong R(A \cup sA) \oplus R(A \cap sA)(1). \end{aligned}$$

□

3. Eine Filtrierung von $\mathbf{B}_x$

Wenn man sich für die $\underline{H}_x$ interessiert, sollte man sich auch mal die Bilder davon unter $\mathcal{E}$ anschauen. Dazu definieren wir zunächst:

DEFINITION 2.5. $\mathbf{B}_x := \mathcal{E}(\underline{H}_x)$.

Während des Beweises der Existenz von $\mathcal{E}$ (Theorem 2.2) haben wir nebenbei die $\mathbf{B}_x$ für Coxeter-Gruppen mit zwei Erzeugern berechnet, und damit auch für beliebige Coxeter-Gruppen, wenn x die Form $stst\cdots$ hat (Gleichung (2.3)):

$$\mathbf{B}_x \cong R(\leqq x)(-\tfrac{l(x)}{2}). \tag{2.11}$$

Insbesondere sind die $\mathbf{B}_x$ in diesem Fall echte Moduln (d. h. Elemente der Grothendieck-Gruppe, zu denen es wirklich Moduln gibt).

Es gibt einige Zusammenhänge zwischen der Struktur von $\underline{H}_x$ und der von $\mathbf{B}_x$ – teils bewiesen, teils unbewiesen. In diesem Abschnitt werden wir vor allem auf eine Sache näher eingehen: Wenn man auf geschickte Art eine Filtrierung von $\mathbf{B}_x$ bastelt, findet man darin die Kazhdan-Lusztig-Polynome wieder. Das ist im Allgemeinen noch nicht bewiesen, aber für den Dieder-Fall lässt es sich leicht nachrechnen. Das werden wir auch tun.

3.1. Die Kazhdan-Lusztig-Polynome bei den $\mathbf{B}_x$. In diesem Unterabschnitt werden wir die allgemeine Konstruktionsvorschrift für die erwähnte Filtrierung angeben und beschreiben, wo man dann die Kazhdan-Lusztig-Polynome findet. Dazu als erstes folgende Definition:

DEFINITION 2.6.

- *Für $A \subset \mathcal{W}$, A endlich, sei*
$$I(A) := \{f \in S \otimes S \mid f \restriction \Gamma_A = 0\}$$
das Ideal der Funktionen, die auf Γ_A verschwinden.

- *Für einen $S \otimes S$-Modul M sei* $\Gamma_A M := M/\left(I(A)M\right)$.

Wenn man sich M als Funktionen auf einer Teilmenge T von $V \times V$ vorstellt, kann man sich auch $\Gamma_A M$ anschaulich vorstellen: $I(A)M$ ist genau das, was außerhalb von Γ_A lebt. Das wird weggeteilt, also bleiben die Funktionen auf $T \cap \Gamma_A$.

Sei $x \in \mathcal{W}$ gegeben. Seien $A_i \subset \mathcal{W}$ und $y_i \in \mathcal{W}$ so, dass folgendes erfüllt ist:

$$\emptyset = A_0 \subset \cdots \subset A_k = \{\leqq x\}$$
$$A_i \setminus A_{i-1} = \{y_i\}$$
$$\forall i, j \colon y_i > y_j \Rightarrow i > j.$$

Also: Die A_i sind eine Folge ineinanderliegender Teilmengen von $\{\leqq x\}$, wobei bei jedem Schritt ein Element dazu kommt. (Insbesondere ist $k = \#\{\leqq x\}$.) Das Ganze soll so sein, dass, wenn $y < z$ ist, y auch zuerst dazu kommen muss.

Daraus machen wir jetzt die Filtrierung:

$$\mathbf{B}_x \cong \Gamma_{A_k}\mathbf{B}_x \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow \Gamma_{A_1}\mathbf{B}_x \twoheadrightarrow \Gamma_{A_0}\mathbf{B}_x = 0.$$

(Hier wäre natürlich als allererstes $\mathbf{B}_x \cong \Gamma_{A_k}\mathbf{B}_x$ zu beweisen; das sollte aber nicht allzu schwer sein.)

Jetzt schauen wir uns die Kerne der Abbildungen an. Sie lassen sich in folgender Form schreiben:

$$\ker\left(\Gamma_{A_i}\mathbf{B}_x \twoheadrightarrow \Gamma_{A_{i-1}}\mathbf{B}_x\right) \cong \bigoplus_{\nu} R(\{y_i\})^{n_\nu}\left(\tfrac{l(y_i)-\nu}{2}\right), \tag{2.12}$$

wobei nur endlich viele n_ν ungleich 0 sind. Sie sind also direkte Summen von endlich vielen Kopien von $R(\{y_i\})$, manche davon in der Graduierung verschoben. Hier findet man jetzt das Kazhdan-Lusztig-Polynom h_{x,y_i}. (Zur Erinnerung: $\underline{H}_x = \sum_{y \in \mathcal{W}} h_{x,y} H_y$.)

$$h_{x,y_i} = \sum_{\nu} n_\nu v^\nu.$$

Man beachte, dass die Filtrierung nicht eindeutig festgelegt war; in der Bruhat-Ordung unvergleichbare Elemente können vertauscht werden. Trotzdem kommt immer das Gleiche raus.

3.2. Der Dieder-Fall. Für die Dieder-Gruppen lässt sich das Ganze einigermaßen leicht nachrechen, da wir alles explizit kennen. Sei $x \in \mathcal{W}$ gegeben. Aus $\mathbf{B}_x \cong R(\leqq x)(-\frac{l(x)}{2})$ folgt $\Gamma_{A_i}\mathbf{B}_x \cong R(A_i)(-\frac{l(x)}{2})$.

Der Kern von $R(A_i)(-\frac{l(x)}{2}) \twoheadrightarrow R(A_{i-1})(-\frac{l(x)}{2})$ ist die Menge der Funktionen auf Γ_{A_i}, die auf $\Gamma_{A_{i-1}}$ verschwinden. Das ist isomorph zu den Funktionen auf Γ_{y_i}, die auf $\Gamma_{y_i} \cap \Gamma_{A_{i-1}}$ verschwinden.

In der Dieder-Gruppe gibt es nur Drehungen und Spiegelungen. Für $y, z \in \mathcal{W}$ ist

$$\Gamma_y \cap \Gamma_z = \{(yv, v) \mid yv = zv\} = \left\{(yv, v) \mid v = y^{-1}zv\right\}.$$

Falls $y^{-1}z$ eine Spiegelung ist, ist das ein Unterraum von Γ_y der Kodimension eins, ansonsten ist das nur der Ursprung. Das bedeutet, dass $\Gamma_{y_i} \cap \Gamma_{A_{i-1}}$ die Vereinigung von μ vielen Unterräumen von Γ_{y_i} der Kodimension eins ist, wobei μ die Anzahl der $z \in A_{i-1}$ ist, für die $y_i^{-1}z$ eine Spiegelung ist. Daraus folgt (mit ein bisschen algebraischer Geometrie), dass unser gesuchter Kern isomorph ist zum Raum der regulären Funktionen auf Γ_{y_i}, um $\mu - \frac{l(x)}{2}$ im Grad verschoben:

$$\ker\left(R(A_i)(-\tfrac{l(x)}{2}) \twoheadrightarrow R(A_{i-1})(-\tfrac{l(x)}{2})\right) \cong R(\{y_i\})(\mu - \tfrac{l(x)}{2}).$$

(Der Isomorphismus ist die Multiplikation mit je einer Gleichung für jeden der μ vielen Hyperebenen von Γ_{y_i}, auf denen der Kern verschwindet.)

Jetzt berechnen wir μ. In der Dieder-Gruppe sind Spiegelungen genau die Elemente mit ungerader Länge, d. h. wir müssen die Elemente aus A_i zählen, deren Länge eine andere Parität hat als $l(y_i)$. A_i enthält alle Elemente, die in der Bruhat-Ordnung kleiner sind als y_i, und keine, die größer sind. Zu y_i unvergleichbare Elemente gibt es nur eines, und das hat die gleiche Länge wie y_i; es ist also irrelevant.

Falls $l(y_i)$ gerade ist, bekommt man für jede ungerade Zahl kleiner $l(y_i)$ zwei Elemente dieser Länge, also $\mu = l(y_i)$; falls $l(y_i)$ ungerade ist, bekommt man für jede gerade Zahl zwei Elemente, außer für null: Da gibt es nur das neutrale Element. Das macht auch wieder $\mu = l(y_i)$.

Der Kern der Abbildung ist damit

$$R(\{y_i\})(l(y_i) - \tfrac{l(x)}{2}) \cong R(\{y_i\})\left(\tfrac{l(y_i)-(l(x)-l(y_i))}{2}\right).$$

Also $n_{l(x)-l(y_i)} = 1$, und alle anderen n_μ sind null.

Jetzt erinnern wir uns daran, wie die Kazhdan-Lusztig-Polynome aussehen:

$$\underline{H}_x = \sum_{y \leqq x} v^{l(x)-l(y)} H_y,$$

also $h_{x,y_i} = v^{l(x)-l(y_i)}$. Wunderbar, es stimmt.

3.3. Wenn die $\mathbf{B}_x$ echte Moduln sind. Zum Abschluss dieses Kapitels noch ein paar Gedanken darüber, was es für die $\underline{H}_x$ bedeutet, ob die $\mathbf{B}_x$ echte Moduln sind. Das bisher Gesagte legt nahe, dass die $\mathbf{B}_x$ echte Moduln sein müssen; sonst könnte man ja gar keine Filtrierung definieren. Andererseits: Wenn man davon ausgeht, dass wir irgendwie auch für die virtuellen Moduln eine Filtrierung bekommen können, dann kommt man zu folgendem Zusammenhang:

Wenn ein Koeffizient eines Kazhdan-Lusztig-Polynoms negativ ist, muss bei (2.12) ein Summand mit negativer Vielfachheit auftreten; also ist der Kern dann kein echter Modul mehr. Das kann nur dann sein, wenn das entsprechende $\mathbf{B}_x$ kein echter Modul ist.

Deshalb ist es naheliegend, dass man daraus, dass die $\mathbf{B}_x$ echte Moduln sind, relativ leicht folgern könnte, dass die Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome nicht negativ sind. Es gibt einige Ansätze, das auf diese Art zu beweisen. Wir werden uns im nächsten Kapitel auch damit beschäftigen, ob die Koeffizienten positiv sind, allerdings mit einem anderen Ansatz.

KAPITEL 3

Kombinatorische Herangehensweise

In diesem Kapitel sehen wir uns die Kazhdan-Lusztig-Polynome etwas genauer an. Insbesondere zeigen wir im zweiten Abschnitt, dass für universelle Coxeter-Gruppen die Koeffizienten wirklich nicht negativ sind (nachdem wir im ersten Abschnitt einige vorbereitende Überlegungen angestellt haben). Danach verallgemeinern wir die Resultate auf direkte Produkte von solchen Coxeter-Gruppen, und am Ende gehen wir noch darauf ein, wie man den Beweis für universelle Coxeter-Gruppen verallgemeinern könnte, auf solche Coxeter-Gruppen, die nur Relationen der Form $stst = e$ haben. In dieser Richtung können wir immerhin einige plausible Vermutungen aufstellen.

1. Vorbereitungen

1.1. Eine neue Basis. Wenn man einige $\underline{H}_x$ ausrechnet, stellt man fest, dass sie sich häufig als Summe von wenigen Termen der Form $\sum_{y \leqq x} v^{n-l(y)} H_y$ schreiben lassen. Für den Fall, dass die Coxeter-Gruppe nur zwei Erzeuger hat, haben wir schon gesehen, dass $\underline{H}_x$ selbst diese Form hat. Das legt nahe, die folgende neue $\mathcal{L}$-Basis von $\mathcal{H}$ zu definieren:

Definition 3.1. *Sei* $\mathbf{S}_x := \sum_{y \leqq x} v^{-l(y)} H_y$ *für* $x \in \mathcal{W}$.

Im Dieder-Fall ist jetzt z. B. $\underline{H}_x = v^{l(x)} \mathbf{S}_x$ (siehe (1.8)). Allgemein sieht $\underline{H}_x$ in dieser Basis folgendermaßen aus:

$$\underline{H}_x = v^{l(x)} \mathbf{S}_x + \sum_{y<x} v^{l(y)+1} \hat{h} \mathbf{S}_y \quad \text{mit } \hat{h} \in \mathbb{Z}[v]. \tag{3.1}$$

Das folgt direkt aus den Forderungen an die Darstellung von $\underline{H}_x$ in der Basis $(H_y)_y$: Weil keine negativen v-Potenzen vorkommen dürfen, muss bei der Darstellung in der Basis $(\mathbf{S}_y)_y$ vor jedem $\mathbf{S}_y$ mindestens $v^{l(y)}$ stehen. Weil H_x vorkommen muss, muss $v^{l(x)}\mathbf{S}_x$ vorkommen, und weil bei anderen Summanden die v-Potenz sogar echt positiv sein muss, muss vor allen anderen $\mathbf{S}_y$ sogar mindestens $v^{l(y)+1}$ stehen.

Für universelle Coxeter-Gruppen werden wir nicht nur beweisen, dass die Kazhdan-Lusztig-Polynome keine negativen Koeffizienten haben, sondern sogar die $\hat{h}$ aus (3.1). Daraus folgt dies auch für die Kazhdan-Lusztig-Polynome, da die $\mathbf{S}_x$ bei der Darstellung in der Basis $(H_y)_y$ keine negativen Koeffizienten haben.

1.2. Operation der $\underline{H}_x$ auf der neuen Basis. Die $\underline{H}_x$ kann man rekursiv konstruieren, indem man immer wieder mit einem $\underline{H}_s$ multipliziert und dann irgendwelche anderen $\underline{H}_y$ abzieht. Also müssen wir untersuchen, wie die Multiplikation von links mit einem $\underline{H}_s$ auf den $\mathbf{S}_x$ operiert. Wir werden sehen, dass sich $\underline{H}_s\mathbf{S}_x$ auch wieder einfach in der Basis $(\mathbf{S}_y)_y$ ausdrücken lässt. Das ist der Grund dafür, dass diese Basis gut geeignet ist, um die $\underline{H}_x$ zu berechnen.

$\underline{H}_s\mathbf{S}_x$ haben wir schon fast in Lemma 1.21 ausgerechnet:

$$\begin{aligned}
\underline{H}_s\mathbf{S}_x &= v^{-l(x)}\underline{H}_s \sum_{y\leqq x} v^{l(x)-l(y)} H_y \\
&= v^{-l(x)} \sum_{y\leqq x \vee sy\leqq x} v^{l(x)-l(y)+1} H_y + \sum_{y\leqq x\wedge sy\leqq x} v^{l(x)-l(y)-1} H_y \\
&= v \sum_{y\leqq x \vee sy\leqq x} v^{-l(y)} H_y + v^{-1} \sum_{y\leqq x\wedge sy\leqq x} v^{-l(y)} H_y.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle wird es praktisch, Abbildungen zu definieren, die einem $\mathbf{S}_x$ die linke bzw. rechte Summe von $\underline{H}_s\mathbf{S}_x$ zuordnen:

DEFINITION 3.2. *$L_s, K_s\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ seien $\mathcal{L}$-lineare Abbildungen, die auf der Basis $(\mathbf{S}_x)_x$ folgendermaßen operieren:*[1]

$$L_s\mathbf{S}_x := \sum_{y\leqq x\vee sy\leqq x} v^{-l(y)} H_y,$$

$$K_s\mathbf{S}_x := \sum_{y\leqq x\wedge sy\leqq x} v^{-l(y)} H_y.$$

Wir können jetzt also $\underline{H}_s\mathbf{S}_x = vL_s\mathbf{S}_x + v^{-1}K_s\mathbf{S}_x$ schreiben, und weil alles linear ist sogar

$$\forall H\in\mathcal{H}\colon \underline{H}_s H = vL_sH + v^{-1}K_sH.$$

1.3. Allgemeingültige Eigenschaften. Nun müssen wir L_s und K_s untersuchen. Einiges von dem, was wir zeigen wollen, geht in beliebigen Coxeter-Gruppen; für anderes muss man sich auf Coxeter-Gruppen einschränken, in denen es nur Relationen der Form $stst = e$ gibt. Zunächst das, was in beliebigen Coxeter-Gruppen geht:

LEMMA 3.3. *Sei $s\in\mathcal{S}$. Dann gilt:*

(i) *Für $sx < x$ ist $L_s\mathbf{S}_x = K_s\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_x$.*
(ii) *Für $sx > x$ ist $L_s\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_{sx}$.*

[1] L und K stehen für „länger“ und „kürzer“, weil sich rausstellen wird, dass oft $L_s\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_y$ ist, mit y länger als x, und entsprechend $K_s\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_y$ mit y kürzer als x.

Beweis: Um solche Gleichheiten zu zeigen, werden wir bei diesem wie auch bei nachfolgenden Beweisen einfach nachprüfen, dass auf beiden Seiten die gleichen $v^{-l(y)}\mathbf{S}_y$ aufsummiert werden.

(i) Sei $sx < x$. Dann besagt Korollar 1.13, dass $y \leqq x$ äquivalent zu $sy \leqq x$ ist; daraus folgt

$$y \leqq x \vee sy \leqq x \Leftrightarrow y \leqq x \wedge sy \leqq x \Leftrightarrow y \leqq x$$
$$\Rightarrow \sum_{y \leqq x \vee sy \leqq x} v^{-l(y)} H_y = \sum_{y \leqq x \wedge sy \leqq x} v^{-l(y)} H_y = \sum_{y \leqq x} v^{-l(y)} H_y$$
$$\Rightarrow L_s\mathbf{S}_x = K_s\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_x.$$

(ii) Aus $sx > x$ folgt (wieder mit Korollar 1.13) $y \leqq sx \Leftrightarrow y \leqq x \vee sy \leqq x$. Genau das ist zu zeigen. □

Offensichtlich fehlt in dem Lemma eine Aussage über $K_s\mathbf{S}_x$ für $sx > x$. Man kann sich zwar überlegen, wie man das in der Basis $(\mathbf{S}_y)_y$ ausdrücken kann, allerdings ist es im Allgemeinen nicht einfach nur ein $\mathbf{S}_y$ für passendes y, sondern eine Linearkombination, und es können sogar negative Koeffizienten vorkommen. Deshalb werden wir uns in Zukunft auf Coxeter-Gruppen, die nur Relationen der Form $stst = e$ haben, beschränken. (Dort ist es schöner.)

1.4. Eigenschaften bei Coxeter-Gruppen mit *stst*-Relationen. Für diese Gruppen ergänzen wir Lemma 3.3 um eine Aussage über $K_s\mathbf{S}_x$ für $sx > x$. Wir wiederholen im folgenden Lemma auch die Aussagen von Lemma 3.3, um alles beisammen zu haben.

LEMMA 3.4. *Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein Coxeter-System, in dem es nur Relationen der Form $t_1t_2t_1t_2 = e$ gibt. Sei $s \in \mathcal{S}$ und $x \in \mathcal{W}$. Dann gilt:*

(i) *Für $sx < x$ ist $L_s\mathbf{S}_x = K_s\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_x$*
(ii) *Für $sx > x$ ist $L_s\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_{sx}$.*
(iii) $K_s\mathbf{S}_e = 0$.
(iv) *Für $t \in \mathcal{S}$ und $sx > x > tx$ ist*

$$K_s\mathbf{S}_x = \begin{cases} K_s\mathbf{S}_{tx} & \textit{falls } stst \neq e, \\ L_tK_s\mathbf{S}_{tx} & \textit{falls } stst = e. \end{cases}$$

Beweis: (i) und (ii) sind schon bewiesen. (iii) ist klar. (Es gibt kein y mit $y \leqq e \wedge sy \leqq e$.) Bleibt (iv). Sei $x = s_1 \cdots s_n$ eine reduzierte Darstellung von x mit $s_1 = t$, und sei $\tilde{x} := tx = s_2 \cdots s_n$.

1. Fall: $stst \neq e$. Wir müssen zeigen, dass bei $K_s\mathbf{S}_x$ und bei $K_s\mathbf{S}_{\tilde{x}}$ über das Gleiche summiert wird, also

$$y \leqq x \wedge sy \leqq x \Leftrightarrow y \leqq \tilde{x} \wedge sy \leqq \tilde{x}.$$

Die Richtung von rechts nach links ist klar (wegen $\tilde{x} < x$). Für die andere Richtung sei y so, dass $y \leqq x$ und $sy \leqq x$ ist. Annahme: $y \nleqq \tilde{x}$.

Wegen $y \leqq x$ gibt es $i_1, \dots, i_k$ so, dass $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ eine reduzierte Darstellung von y ist. Wegen $y \nleqq \tilde{x}$ muss $i_1 = 1$ sein, also $ty < y$. Aus Korollar 1.15 und $stst \neq e$ folgt, dass nicht gleichzeitig $ty < y$ und $sy < y$ sein kann. Also ist $sy > y$.

Jetzt benutzen wir $sy \leqq x$, um eine reduzierte Darstellung $sy = s_{j_1} \cdots s_{j_k}$ zu finden. Wenn $j_1 > 1$ wäre, wäre $y < sy < \tilde{x}$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Also ist $j_1 = 1$, und damit ist $tsy < sy$. Korollar 1.15 auf sy angewendet besagt aber, dass nicht gleichzeitig $y < sy$ und $tsy < sy$ sein kann. Widerspruch. Also ist $y \leqq \tilde{x}$.

Analog zeigt man $sy \leqq \tilde{x}$ (indem man überall y durch sy ersetzt).

2. Fall: $stst = e$. Wir zeigen wieder, dass links und rechts über die gleichen y summiert wird.

Links läuft die Summe über die y mit $y \leqq x \wedge sy \leqq x$. Wir machen eine Fallunterscheidung danach, ob $y > sy$ ist.

Fall $y > sy$: Mit Korollar 1.16 und $stst = e$ folgt daraus $ty > sty$.

$$\begin{aligned} y \leqq x \wedge sy \leqq x &\overset{y>sy}{\Leftrightarrow} y \leqq x = t\tilde{x} \\ &\overset{\text{Korollar 1.13}}{\Leftrightarrow} y \leqq \tilde{x} \vee ty \leqq \tilde{x} \\ &\overset{y>sy \text{ und } ty>sty}{\Leftrightarrow} (y \leqq \tilde{x} \wedge sy \leqq \tilde{x}) \vee (ty \leqq \tilde{x} \wedge sty \leqq \tilde{x}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Bevor wir weitermachen, behandeln wir den Fall $y < sy$. Oder genauer: Wir behandeln ihn nicht, denn der geht ganz analog zum Fall $y > sy$, und man erhält auch wieder die Äquivalenz (3.2).

An dieser Stelle müssen wir eine kleine Induktion reinschmuggeln: Da $\tilde{x} < x$ ist, können wir induktiv davon ausgehen, dass $K_s\mathbf{S}_{\tilde{x}}$ entweder null ist oder die Form $\mathbf{S}_z, z \in \mathcal{W}$, hat.

Wenn $K_s\mathbf{S}_{\tilde{x}} = 0$ ist, gibt es kein y mit $y \leqq \tilde{x} \wedge sy \leqq \tilde{x}$, und damit gibt es überhaupt kein y, das die rechte Seite von (3.2) erfüllt. Also ist $K_s\mathbf{S}_x = 0$. Wenn $K_s\mathbf{S}_{\tilde{x}} = 0$ ist, ist aber auch $L_tK_s\mathbf{S}_{\tilde{x}} = 0$, also $K_s\mathbf{S}_x = L_tK_s\mathbf{S}_{\tilde{x}}$.

Wenn $K_s\mathbf{S}_{\tilde{x}} = \mathbf{S}_z$ ist, ist $y \leqq \tilde{x} \wedge sy \leqq \tilde{x}$ äquivalent zu $y \leqq z$ und $ty \leqq \tilde{x} \wedge sty \leqq \tilde{x}$ äquivalent zu $ty \leqq z$. Zusammen ergibt das (mit (3.2))

$$y \leqq x \wedge sy \leqq x \Leftrightarrow y \leqq z \vee ty \leqq z,$$

also $K_s\mathbf{S}_x = L_t\mathbf{S}_z = L_tK_s\mathbf{S}_x$. □

Durch rekursives Anwenden dieses Lemmas können wir jetzt $K_s\mathbf{S}_x$ auch für $sx > x$ berechnen: Man kann die Berechnung von $K_s\mathbf{S}_x$ immer auf die Berechnung eines $K_s\mathbf{S}_{tx}$ mit $tx < x$ zurückführen. Irgendwann ist entweder $x = e$ oder $sx < x$, und dann kennen wir $K_s\mathbf{S}_x$ schon. Insbesondere erhält man folgendes Korollar:

KOROLLAR 3.5. *Seien $x \in \mathcal{W}$ und $s \in \mathcal{S}$ gegeben. Dann ist $K_s\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_y$ für ein $y \in \mathcal{W}$, falls $s < x$ ist, und $K_s\mathbf{S}_x = 0$ sonst. Im ersten Fall gilt $sy < y$ und $y \leqq x$.*

Bemerkung: Wenn im ersten Fall $sx > x$ ist, ist $y \neq x$ wegen $sy < y$, also ist sogar $y < x$.

Beweis: Wir machen Induktion über $l(x)$ und dann noch eine Fallunterscheidung:

Fall $x = e$: $K_s\mathbf{S}_e = 0$.

Fall $sx < x$: Dann ist $K_s\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_y$ mit $y = x$. Es gilt $sy < y$ und $y \leqq x$. Wegen $sx < x$ gibt es eine reduzierte Darstellung von x, die mit s beginnt, also insbesondere $s < x$.

Für die restlichen Fälle sei $t \in \mathcal{S}$ mit $tx < x$.

Fall $sx > x, s \not< x$: Dann ist auch $s \not< tx$, also $K_s\mathbf{S}_{tx} \overset{\text{I.V.}}{=} 0$. Nun ist entweder $K_s\mathbf{S}_x = K_s\mathbf{S}_{tx} = 0$ oder $K_s\mathbf{S}_x = L_tK_s\mathbf{S}_{tx} = 0$ (je nachdem, ob $stst = e$ ist oder nicht).

Jetzt bleiben nur noch Fälle mit $s < x$. Dann ist auch $s < tx$ und damit nach Induktionsvoraussetzung $K_s\mathbf{S}_{tx} = \mathbf{S}_y$.

Fall $sx > x, stst \neq e, s < x$: $K_s\mathbf{S}_x = K_s\mathbf{S}_{tx} \overset{\text{I.V.}}{=} \mathbf{S}_y$ mit $sy < y$ und $y \leqq tx < x$.

Fall $sx > x, stst = e, s < x$: $K_s\mathbf{S}_x = L_tK_s\mathbf{S}_{tx} \overset{\text{I.V.}}{=} L_t\mathbf{S}_y$ mit $sy < y$ und $y \leqq tx$. Jetzt machen wir noch eine Unterfallunterscheidung danach, ob $ty < y$ ist:

Unterfall $ty < y$: Dann ist $K_s\mathbf{S}_x = L_t\mathbf{S}_y = \mathbf{S}_y$. Aus $y \leqq tx$ folgt wieder $y \leqq x$. Fertig.

Unterfall $ty > y$: Dann ist $K_s\mathbf{S}_x = L_t\mathbf{S}_y = \mathbf{S}_{ty}$. Zu zeigen ist also noch $sty < ty$ und $ty \leqq x$. Ersteres folgt mit Korollar 1.16 aus $sy < y$, letzteres mit Korollar 1.12 aus $y \leqq tx$, $ty > y$ und $x > tx$. □

1.5. Die Unterräume $\mathcal{H}_s$ und $\mathcal{H}_s^\perp$. Wir haben in Lemma 3.4 einige Aussagen über $\mathbf{S}_x$ gemacht, die nur für $sx > x$ oder nur für $sx < x$ gelten. Weil alles so schön linear ist, kann man diese Aussagen leicht für den ganzen Unterraum von $\mathcal{H}$ verallgemeinern, der von den

$\mathbf{S}_x$ aufgespannt wird mit $sx > x$ bzw. mit $sx < x$. Deshalb erst mal folgende Definition:

Definition 3.6.

- $\mathcal{H}_s := \langle \mathbf{S}_x \rangle_{sx<x}$ *sei der Unterraum von* $\mathcal{H}$*, der nur von den* $\mathbf{S}_x$ *aufgespannt wird mit* $sx < x$.
- $\mathcal{H}_s^\perp := \langle \mathbf{S}_x \rangle_{sx>x}$ *sei der Unterraum, der nur von den* $\mathbf{S}_x$ *aufgespannt wird mit* $sx > x$*, also das orthogonale Komplement von* $\mathcal{H}_s$ *bezüglich der Basis* $(\mathbf{S}_y)_y$.

Und jetzt die verallgemeinerten (und leicht veränderten) Aussagen von Lemma 3.4 (auch wieder nur für Coxeter-Gruppen, die nur Relationen der Form $t_1t_2t_1t_2 = e$ haben):

Lemma 3.7. *Seien* $s, t \in \mathcal{S}$*. Dann gilt:*

(i) *Für* $H \in \mathcal{H}_s$ *ist* $K_sH = L_sH = H$.
(ii) *Für* $stst \neq e$ *ist* $K_sL_tH = K_sH$.
(iii) *Für* $stst = e, H \in \mathcal{H}_t^\perp \cap \mathcal{H}_s^\perp$ *ist* $K_sL_tH = L_tK_sH$.

Beweis: (i) Wegen der Linearität von L_s und K_s reicht es, $H = \mathbf{S}_x$ mit $sx < x$ zu betrachten. Dann ist das aber gerade Aussage (i) von Lemma 3.4.

(ii) Es reicht, die Aussage für $H = \mathbf{S}_x$ zu zeigen. Falls $tx < x$ ist, gilt $L_t\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_x$, und wir sind fertig. Sonst ist $L_t\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_{tx}$. Zu zeigen ist dann noch $K_s\mathbf{S}_{tx} = K_s\mathbf{S}_x$. Aus $stst \neq e$ und $tx > x$ folgt $stx > tx$ (Korollar 1.15). Also folgt die Aussage aus Lemma 3.4, (iv), Fall $stst \neq e$.

(iii) Es reicht, die Aussage für $H = \mathbf{S}_x$ mit $tx > x$ und $sx > x$ zu zeigen. Wieder ist $L_t\mathbf{S}_x = \mathbf{S}_{tx}$. Zu zeigen ist also $K_s\mathbf{S}_{tx} = L_tK_s\mathbf{S}_x$. Diesmal folgt $stx > tx$ aus $sx > x$ und Korollar 1.16, und die Aussage folgt wieder aus Lemma 3.4, (iv), diesmal Fall $stst = e$. □

Aussage (iii) von Lemma 3.7 sieht schon so schön nach Kommutativität aus. Da fragt man sich: Kann man noch mehr in der Art zeigen? Antwort: Man kann.

Korollar 3.8. *Sei* $stst = e$ *und* $H \in \mathcal{H}_t^\perp \cap \mathcal{H}_s^\perp$*. Dann gilt:*

(i) $L_sL_tH = L_tL_sH$.
(ii) $K_sL_tH = L_tK_sH$.
(iii) $K_sK_tH = K_tK_sH$.
(iv) $L_s\underline{H}_tH = \underline{H}_tL_sH$.
(v) $K_s\underline{H}_tH = \underline{H}_tK_sH$.
(vi) $\underline{H}_s\underline{H}_tH = \underline{H}_t\underline{H}_sH$.

Beweis: (ii) haben wir schon gezeigt. (i) erhält man wegen $L_s L_t \mathbf{S}_x = \mathbf{S}_{stx} = \mathbf{S}_{tsx} = L_t L_s \mathbf{S}_x$ für $sx > x, tx > x$. Aus $H_s H_t = H_{st} = H_{ts} = H_t H_s$ folgt $\underline{H}_s \underline{H}_t = \underline{H}_t \underline{H}_s$ und daraus (vi).

Es ist

$$\begin{aligned} \underline{H}_s \underline{H}_t H &= v L_s \underline{H}_t H + v^{-1} K_s \underline{H}_t H \\ &= v^2 L_s L_t H + L_s K_t H + K_s L_t H + v^{-2} K_s K_t H. \end{aligned}$$

Wenn man das nach $K_s K_t H$ auflöst und dann nochmal mit vertauschten s und t hinschreibt, sind die beiden rechten Seiten wegen (i), (ii) und (vi) gleich, also $K_s K_t H = K_t K_s H$.

Wegen $\underline{H}_s H = v L_s H + v^{-1} K_s H$ folgen (iv) und (v) jetzt aus (i), (ii) und (iii). □

Wenn man sich Lemma 3.4 und Korollar 3.5 genau anschaut, stellt man fest: Es ist immer $L_s \mathbf{S}_x = \mathbf{S}_y$ bzw. $K_s \mathbf{S}_x = \mathbf{S}_y$ für ein y mit $sy < y$. Wegen der Linearität von L_s und K_s bekommt man damit die folgende, ganz allgemeine Aussage:

KOROLLAR 3.9. *Für beliebige $H \in \mathcal{H}$ ist $L_s H \in \mathcal{H}_s$ und $K_s H \in \mathcal{H}_s$.*

Daraus kann man jetzt noch eine Aussage über die $\underline{H}_x$ bekommen:

KOROLLAR 3.10. *Für $sx < x$ ist $\underline{H}_x \in \mathcal{H}_s$.*

Beweis: Induktion über $l(x)$: Für $x = e$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $\tilde{x} := sx < x$. Dann ist $\underline{H}_s \underline{H}_{\tilde{x}} = v L_s \underline{H}_{\tilde{x}} + v^{-1} K_s \underline{H}_{\tilde{x}} \in \mathcal{H}_s$. Sei

$$\underline{H}_s \underline{H}_{\tilde{x}} = v^{l(x)} \mathbf{S}_x + \sum_{y<x} h'_y v^{l(y)} \mathbf{S}_y \text{ mit } h'_y \in \mathbb{Z}[v]. \tag{3.3}$$

(Dass man $\underline{H}_s \underline{H}_{\tilde{x}}$ in dieser Form schreiben kann, kann man sich leicht selbst überlegen.) Wegen $\underline{H}_s \underline{H}_{\tilde{x}} \in \mathcal{H}_s$ läuft die Summe sogar nur über solche y mit $sy < y$. (Alle anderen h'_y sind null.)

Um $\underline{H}_x$ zu erhalten, muss man zu jedem H_y, das (ohne v) als Summand in (3.3) vorkommt, das entsprechende $\underline{H}_y$ abziehen. Das ist dann der Fall, wenn die v-Potenz vor $\mathbf{S}_y$ nur $v^{l(v)}$ ist. Also ist $\underline{H}_x = \underline{H}_s \underline{H}_{\tilde{x}} - \sum_{y<x} h'_y(0) \underline{H}_y$. Da auch hier die rechte Summe nur über y läuft mit $sy < y$, können wir die Induktionsvoraussetzung auf $\underline{H}_y$ anwenden: $\underline{H}_y \in \mathcal{H}_s$ für alle y mit $h'_y(0) \neq 0$. Daraus folgt $\underline{H}_x \in \mathcal{H}_s$. □

2. Die Kazhdan-Lusztig-Polynome bei universellen Coxeter-Gruppen

Sei im Folgenden $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein universelles Coxeter-System, d. h. die $s \in \mathcal{S}$ erfüllen keine weiteren Relationen außer $s^2 = e$. Mit dem, was wir im vorigen Abschnitt gemacht haben, können wir für diesen Fall jetzt zeigen, dass die Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome nie negativ sind. Eigentlich hätten wir es uns im vorigen Abschnitt noch einfacher machen können, wenn wir uns gleich auf diesen Fall beschränkt hätten. Allerdings lässt sich so vermutlich fast der ganze Beweis auf den *stst*-Fall verallgemeinern. (Mehr dazu im vierten Abschnitt.)

Wie schon angekündig, zeigen wir die folgende, etwas schärfere Behauptung:

Proposition 3.11. *Sei die Coxeter-Gruppe wie oben angegeben. Sei*

$$\underline{H}_x = v^{l(x)}\mathbf{S}_x + \sum_{y<x} v^{l(y)+1} p_y \mathbf{S}_y$$

eine Darstellung von $\underline{H}_x$ in der Basis $(\mathbf{S}_y)_y$. Dann sind alle Koeffizienten der p_y nicht negativ.

Beweis: Wir werden recht häufig positive Linearkombinationen von $v^n \underline{H}_x$ brauchen. Deshalb als erstes ein paar Definitionen, nur um kürzere Schreibweisen dafür zu haben:

Definition 3.12.

- $\mathbb{Z}[v]^+ \subset \mathbb{Z}[v]$ *sei die Menge der Polynome, die keine negativen Koeffizienten haben.*
- $\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x} := \sum_{y<x} \mathbb{Z}[v]^+ \underline{H}_y$ *sei die Menge der positiven Linearkombinationen von $v^n \underline{H}_y$ mit $y < x$ und $n \geq 0$.*[2]
- $\underline{\mathcal{H}}^{++}_{\leqq x} := \sum_{y \leqq x} \mathbb{Z}[v]^+ \underline{H}_y$ *entsprechend für $y \leqq x$.*

Bemerkung: Da $\underline{H}_{sx}$ aus $\underline{H}_s \underline{H}_x$ entsteht, indem man andere $\underline{H}_y$ abzieht, liegt $\underline{H}_s \underline{H}_x$ für $sx > x$ in $\underline{\mathcal{H}}^{++}_{\leqq sx}$.

Um Proposition 3.11 zu beweisen, behaupten wir noch ein bisschen mehr. Dieses bisschen mehr beweisen wir per Induktion, und daraus folgt dann die Proposition.

Behauptung:

(3.4) Für $x \in \mathcal{W}, s \in \mathcal{S}$ mit $x = s\tilde{x} > \tilde{x}$ ist $\underline{H}_x \in vL_s \underline{H}_{\tilde{x}} + v\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$.

[2] Die + in der Notation stehen für positive Koeffizienten und für positive v-Potenzen ... damit man sich besser merken kann, was es bedeutet.

$$\text{Für } x \in \mathcal{W}, t \in \mathcal{S} \text{ ist } K_t\underline{H}_x \in \begin{cases} \underline{\mathcal{H}}^{++}_{\leqq x} & \text{falls } tx < x, \\ v\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x} & \text{falls } tx > x. \end{cases} \tag{3.5}$$

Wegen $v\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x} \subset \underline{\mathcal{H}}^{++}_{\leqq x}$ ist bei (3.5) der zweite Fall eine stärkere Aussage als der erste.

Bevor wir die Behauptung beweisen, zeigen wir schnell, warum daraus Proposition 3.11 folgt. Dazu machen wir Induktion über $l(x)$: Nach (3.4) ist $\underline{H}_x \in vL_s\underline{H}_{\tilde{x}} + v\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$. Nach Induktionsvoraussetzung kommen bei $\underline{H}_{\tilde{x}}$ und bei allen Summanden aus $v\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$ nur positive Koeffizienten vor. Wie wir gesehen haben (Lemma 3.4), hat dann $L_s\underline{H}_{\tilde{x}}$ auch nur positive Koeffizienten, und damit auch $\underline{H}_x$.

Jetzt brauchen wir also nur noch (3.4) und (3.5) zu beweisen. Wieder Induktion über $l(x)$ (für beide Aussagen zusammen):

Induktionsanfang von (3.4): $\tilde{x} = e \Rightarrow \underline{H}_x = \mathbf{S}_s = L_s\underline{H}_e$.

Induktionsanfang von (3.5): $K_t\underline{H}_e = 0$.

Induktionsschritt von (3.4): Um $\underline{H}_x$ zu bekommen, berechnen wir $\underline{H}_s\underline{H}_{\tilde{x}}$:

$$\underline{H}_s\underline{H}_{\tilde{x}} = vL_s\underline{H}_{\tilde{x}} + v^{-1}K_s\underline{H}_{\tilde{x}}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung von (3.5) (und wegen $s\tilde{x} > \tilde{x}$) ist damit $\underline{H}_s\underline{H}_{\tilde{x}} \in vL_s\underline{H}_{\tilde{x}} + \underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$. Sei $\underline{H}_s\underline{H}_{\tilde{x}} = vL_s\underline{H}_{\tilde{x}} + \sum_{y<x} p_y\underline{H}_y$ mit $p_y \in \mathbb{Z}[v]^+$. Dann ist $p - p(0) \in v\mathbb{Z}[v]^+$, also $\underline{H}_x = vL_s\underline{H}_{\tilde{x}} + \sum_{y<x} (p_y - p_y(0))\, \underline{H}_y \in vL_s\underline{H}_{\tilde{x}} + v\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$.

Induktionsschritt von (3.5):

1. Fall: $tx < x$. Nach Korollar 3.10 ist $\underline{H}_x \in \mathcal{H}_t$, und damit (nach Lemma 3.7) $K_t\underline{H}_x = \underline{H}_x \in \underline{\mathcal{H}}^{++}_{\leqq x}$.

2. Fall: $tx > x$. Wir benutzen (3.4) und erhalten

$$v^{-1}K_t\underline{H}_x \in v^{-1}K_t\left(vL_s\underline{H}_{\tilde{x}} + v\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}\right) = K_tL_s\underline{H}_{\tilde{x}} + K_t\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$$

Auf die Summanden aus $K_t\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$ wenden wir die Induktionsvoraussetzung an: Für $p \in \mathbb{Z}[v]^+$ und $y < x$ ist $K_tp\underline{H}_y \in p\underline{\mathcal{H}}^{++}_{\leqq y} \subset \underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$. Damit haben wir $v^{-1}K_t\underline{H}_x \in K_tL_s\underline{H}_{\tilde{x}} + \underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$, und es bleibt zu zeigen, dass $K_tL_s\underline{H}_{\tilde{x}} \in \underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$ ist.

Wegen $stst \neq e$ liefert Lemma 3.7 uns $K_tL_s\underline{H}_{\tilde{x}} = K_t\underline{H}_{\tilde{x}}$; darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden. Wir bekommen $K_t\underline{H}_{\tilde{x}} \in \underline{\mathcal{H}}^{++}_{\leqq \tilde{x}} \subset \underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$ und sind fertig. □

3. Direkte Summen

Wir haben jetzt für einige spezielle Coxeter-Gruppen gezeigt, dass die Kazhdan-Lusztig-Polynome nur positive Koeffizienten haben (für Dieder-Gruppen und für universelle Coxeter-Gruppen). In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass sich das ganz einfach auch auf direkte Produkte von diesen Spezialfällen verallgemeinern lässt. Das geht alles glatt wie erwartet; man muss es nur mal nachrechnen.

Als erstes muss man sich klar machen, dass das direkte Produkt von zwei Coxeter-Gruppen $(\mathcal{W}_1, \mathcal{S}_1)$ und $(\mathcal{W}_2, \mathcal{S}_2)$ wieder eine Coxeter-Gruppe ist. Die Erzeuger sind natürlich $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Die Relationen sind zunächst mal die von $\mathcal{W}_1$ und die von $\mathcal{W}_2$. Da jedes Element aus $\mathcal{W}_1$ mit jedem aus $\mathcal{W}_2$ kommutiert, kommen noch die Relationen $s_1 s_2 = s_2 s_1$ für $s_1 \in \mathcal{W}_1$ und $s_2 \in \mathcal{W}_2$ dazu. Wegen $s_1^2 = e$ und $s_2^2 = e$ ist das äquivalent zu $s_1 s_2 s_1 s_2 = e$. Also erfüllt das direkte Produkt tatsächlich alle Bedingungen einer Coxeter-Gruppe.

Für den Rest dieses Abschnitts seien $(\mathcal{W}_1, \mathcal{S}_1)$ und $(\mathcal{W}_2, \mathcal{S}_2)$ Coxeter-Systeme, und $(\mathcal{W}, \mathcal{S}) = (\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2, \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$ sei ihr direktes Produkt.

LEMMA 3.13. *Die Hecke-Algebra zu $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ist die direkte Summe der Hecke-Algebren zu $(\mathcal{W}_1, \mathcal{S}_1)$ und $(\mathcal{W}_2, \mathcal{S}_2)$.*

Beweis: Sei $\mathcal{H}_i$ die Hecke-Algebra zu $(\mathcal{W}_i, \mathcal{S}_i)$ für $i = 1, 2$ und $\mathcal{H}$ die Hecke-Algebra zu $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$. Wir benutzen die Definition der Hecke-Algebren über Erzeuger und Relationen (Definition 1.18). Dann sieht man: Die Erzeuger von $\mathcal{H}$ sind die Erzeuger von $\mathcal{H}_1$ vereinigt mit den Erzeugern von $\mathcal{H}_2$. Die Relationen von $\mathcal{H}$ sind die von $\mathcal{H}_1$, die von $\mathcal{H}_2$ und zusätzlich welche, die daher kommen, dass die Elemente aus $\mathcal{W}_1$ mit denen aus $\mathcal{W}_2$ kommutieren. Diese zusätzlichen Relationen sind $H_{s_1} H_{s_2} = H_{s_2} H_{s_1}$ für $s_1 \in \mathcal{W}_1$ und $s_2 \in \mathcal{W}_2$. Also kommutieren die Erzeuger von $\mathcal{H}_1$ mit denen von $\mathcal{H}_2$, und wir sind fertig. □

Jedes Element $x \in \mathcal{W}$ kann man in der Form $x_1 x_2$ schreiben mit $x_i \in \mathcal{W}_i$. Wenn wir das tun, ist $l(x) = l(x_1) + l(x_2)$. Damit können wir auch $H_x = H_{x_1} H_{x_2}$ schreiben.

Jetzt schauen wir uns die $\underline{H}_x$ an. Zunächst stellt man fest, dass die Involution $H \mapsto \overline{H}$ in $\mathcal{H}_i$ die gleiche ist wie die von $\mathcal{H}$ eingeschränkt auf $\mathcal{H}_i$. Damit brauchen wir für $x \in \mathcal{W}_i$ nicht zu unterscheiden zwischen dem $\underline{H}_x$ aus $\mathcal{H}_i$ und dem $\underline{H}_x$ aus $\mathcal{H}$.

LEMMA 3.14. *Für $x = x_1 x_2, x_i \in \mathcal{W}_i$ ist $\underline{H}_x = \underline{H}_{x_1} \underline{H}_{x_2}$.*

Beweis: Wir müssen nur die Eigenschaften aus dem Theorem, in dem die $\underline{H}_x$ definiert wurden (Theorem 1.19), für $\underline{H}_{x_1} \underline{H}_{x_2}$ nachrechnen.

Da $\underline{H}_{x_1}$ und $\underline{H}_{x_2}$ selbstdual sind, ist auch $\underline{H}_{x_1} \underline{H}_{x_2}$ selbstdual.

Sei $\underline{H}_{x_i} = H_{x_i} + \sum_{y \in \mathcal{W}_i} vp_{y,i} H_y$ mit $p_{y,i} \in \mathbb{Z}[v]$ für $i = 1, 2$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\underline{H}_{x_1}\underline{H}_{x_2} &= H_{x_1}H_{x_2} + \sum_{y \in \mathcal{W}_1} vp_{y,1} H_y H_{x_2} + H_{x_1} \sum_{y \in \mathcal{W}_2} vp_{y,2} H_y \\
&\quad + \sum_{y \in \mathcal{W}_1} vp_{y,1} H_y \sum_{y \in \mathcal{W}_2} vp_{y,2} H_y \\
&= H_x + \sum_{y \in \mathcal{W}_1} vp_{y,1} H_{yx_2} + \sum_{y \in \mathcal{W}_2} vp_{y,2} H_{x_1 y} \\
&\quad + \sum_{y_1 \in \mathcal{W}_1, y_2 \in \mathcal{W}_2} v^2 p_{y_1,1} p_{y_2,2} H_{y_1 y_2}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Also liegt $\underline{H}_{x_1}\underline{H}_{x_2}$ in $H_x + \sum_{y \in \mathcal{W}} v\mathbb{Z}[v] H_y$. □

An (3.6) sieht man: Wenn die Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome von $\underline{H}_{x_1}$ und von $\underline{H}_{x_2}$ nicht negativ sind, sind auch die Koeffizienten der Kazhdan-Lusztig-Polynome von $\underline{H}_x$ nicht negativ.

Zum Schluss dieses Abschnitts werfen wir noch einen kurzen Blick auf die $\mathbf{B}_x$, weil das da genauso schön geht:

KOROLLAR 3.15. *Für $x = x_1x_2, x_i \in \mathcal{W}_i$ ist $\mathbf{B}_x = \mathbf{B}_{x_1} \otimes_S \mathbf{B}_{x_2}$.*

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 3.14, indem man $\mathcal{E}$ darauf anwendet. □

Jetzt sehen wir also auch: Wenn $\mathbf{B}_{x_1}$ und $\mathbf{B}_{x_2}$ echte Moduln sind, dann auch $\mathbf{B}_x$.

4. Vermutungen bei anderen Coxeter-Gruppen

Als wir L_s und K_s untersucht haben, haben wir viele schöne Eigenschaften bekommen, die auch dann noch gelten, wenn es in der Coxeter-Gruppe Relationen der Form $stst = e$ gibt. Außerdem haben wir beim Beweis, dass die Kazhdan-Lusztig-Polynome keine negativen Koeffizienten haben, nur selten verwendet, dass die Coxeter-Gruppe universell ist. Deshalb die Vermutung, dass man viel davon auf den $stst$-Fall verallgemeinern kann.

VERMUTUNG 3.16. *Sei die Coxeter-Gruppe wie oben angegeben. Sei*

$$\underline{H}_x = v^{l(x)}\mathbf{S}_x + \sum_{y<x} v^{l(y)+1} p_y \mathbf{S}_y$$

eine Darstellung von $\underline{H}_x$ in der Basis $(\mathbf{S}_y)_y$. Dann sind alle Koeffizienten der p_y nicht negativ.

Man könnte vielleicht meinen, dass man die Vermutung gleich auf beliebige Coxeter-Gruppen ausdehnen kann. Allerdings wurde in Abschnitt 1.3 schon erwähnt, dass im Allgemeinen $K_s\mathbf{S}_x$ nicht nur positive Koeffizienten in der Basis $(\mathbf{S}_y)_y$ hat. Natürlich könnte die Vermutung trotzdem noch wahr sein (und man findet auch erstaunlich viele Fälle, wo das so ist), aber hier ist ein Gegenbeispiel:

Die Coxeter-Gruppe habe die Erzeuger r, s und t und die Relation $stststst = e$. Dann ist

$$\underline{H}_{trstrst} = v^7\mathbf{S}_{trstrst} + v^5\mathbf{S}_{stst} + 4v^5\mathbf{S}_{trst} + 3v^3\mathbf{S}_t - v^5\mathbf{S}_{tst}. \tag{3.7}$$

(Viel Spaß beim Nachrechnen; die Rechnung befindet sich auf der Titelseite.)

Noch eine Vermutung (wieder nur für Coxeter-Gruppen mit nur $stst$-Relationen):

Vermutung 3.17.

$$\textit{Für } x \in \mathcal{W}, s \in \mathcal{S} \textit{ mit } x = s\tilde{x} > \tilde{x} \textit{ ist } \underline{H}_x \in vL_s\underline{H}_{\tilde{x}} + v\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}. \tag{3.8}$$

$$\textit{Für } x \in \mathcal{W}, t \in \mathcal{S} \textit{ ist } K_t\underline{H}_x \in \begin{cases} \underline{\mathcal{H}}^{++}_{\leqq x} & \textit{falls } tx < x, \\ v\underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x} & \textit{falls } tx > x. \end{cases} \tag{3.9}$$

Wenn man Beispiele durchrechnet, stellt man fest, dass die Behauptungen, die wir im Beweis von Proposition 3.11 aufgestellt haben, auch in diesen Coxeter-Gruppen noch zu gelten scheinen. Außerdem kann man den Beweis durchgehen und findet nur eine einzige Stelle, die verändert werden muss:

Beim Induktionsschritt von (3.5) (hier: (3.9)) im Fall $tx > x$ muss

$$K_tL_s\underline{H}_{\tilde{x}} \in \underline{\mathcal{H}}^{++}_{<x}$$

gezeigt werden. Dort wird $stst \neq e$ benutzt. Man müsste also nur noch den Fall $stst = e$ beweisen. Wenn man sich lange genug damit beschäftigt hat, erscheint das plausibel, aber zu zeigen ist das nicht so leicht.

4.1. Ausblick. Obwohl die Kazhdan-Lusztig-Polynome sich rein kombinatorisch definieren lassen, so dass man meinen müsste, dass sie gar nicht so furchtbar kompliziert sein können, weiß man doch noch recht wenig über sie. Außer dem, was in dieser Arbeit erwähnt wurde, gibt es noch eine ganze Menge anderer Vermutungen über sie und über verwandte Polynome. Einige Spezialfälle sind gelöst, über einige etwas allgemeinere Fälle weiß man schon ein bisschen was, und man hat vielleicht auch das Gefühl, nah an einem Beweis zu sein. Aber der allgemeine Fall scheint noch irgendwo in weiter Ferne zu sitzen.

Notationen

$\mathbf{B}_x$	Das Bild von $\underline{H}_x$ unter $\mathcal{E}$ (Definition 2.5).
$\mathcal{E}$	Siehe Theorem 2.2.
Γ_x, Γ_A	Siehe Definition 2.3.
H	Irgend ein Element aus $\mathcal{H}$.
H_x	Ein Basis-Element von $\mathcal{H}$ (Definition 1.17).
$\underline{H}_x$	Ein Element der selbstdualen Basis von $\mathcal{H}$ (Theorem 1.19).
$\mathcal{H}$	Eine Hecke-Algebra (Definition 1.17).
$\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_s^\perp$	Bestimmte Unterräume von $\mathcal{H}$ (Definition 3.6).
$\underline{\mathcal{H}}_{<x}^{++}, \underline{\mathcal{H}}_{\leqq x}^{++}$	Siehe Definition 3.12.
K_s	Siehe Definition 3.2.
L_s	Siehe Definition 3.2.
$\mathcal{L}$	Die Laurent-Polynome $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$.
$l(x)$	die Länge von x (siehe Seite 1).
$M(n)$	Der Modul M um n in der Graduierung verschoben.
$\langle M \rangle$	Die Äquivalenzklasse der zu M isomorphen Moduln.
$R(A)$	Die regulären Funktionen auf Γ_A.
$R(\leqq x)$	$R(\{w \in \mathcal{W} \| w \leqq x\})$.
r, s, t	Elemente von $\mathcal{S}$.
$S, R(V)$	Die regulären Funktionen auf V.
$S \otimes S, R(V \times V)$	Die regulären Funktionen auf $V \times V$.
$\mathbf{S}_x$	Eine praktische Basis von $\mathcal{H}$ (Definition 3.1).
S^s	Die unter s invarianten Funktionen.
$\langle S \otimes S \rangle$	Siehe Definiton 2.1.
$\boxed{s_i}$	Siehe Seite 2.
V	Ein Vektorraum, auf dem $\mathcal{W}$ operiert.
$\mathcal{W}$	Eine Coxeter-Gruppe (Definition 1.1).
$(\mathcal{W}, \mathcal{S})$	Ein Coxeter-System (Definition 1.1).
x, y, z	Elemente von $\mathcal{W}$.
$\{\leqq x\}$	$\{w \in \mathcal{W} \mid w \leqq x\}$.

Literaturverzeichnis

[BK81] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara: *Kazhdan-Lustzig conjecture and holonomic systems,* Invent. Math. **64** (1981), 387–410.

[Bou68] N. Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie,* chap. 4, 5 et 6, Hermann, Paris 1968.

[Dy88] M. Dyer: *On Some Generalisations of the Kazhdan-Lusztig Polynomials for "Universal" Coxeter Systems*, Journal of Algebra **116** (1988), 353–371.

[Hum90] J. Humphreys: *Reflection Groups and Coxeter Groups,* Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, 1990.

[KL79] D. Kazhdan, G. Lusztig: *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras,* Invent. Math. **53** (1979), 165–184.

[MP95] R. Moody, A. Pianzola: *Lie Algebras With Triangular Decompositions,* John Wiley & Sons, New York, 1995.

[Soe92] W. Soergel: *The combinatorics of Harish-Chandra bimodules,* J. reine angew. Math. **429** (1992), 49–74.

[Soe97] W. Soergel: *Kazhdan-Lusztig-Polynome und eine Kombinatorik für Kipp-Moduln*, Represent. Theory **1** (1997), 37–68.

[Str97] C. Stroppel: *Untersuchungen zu den parabolischen Kazhdan-Lusztig-Polynomen für affine Weyl-Gruppen*, Staatsexamensarbeit, Freiburg i. Br., 1997.